Digitized by Google

5.3.268

Digitized by Google

D. 3.

4

Digitized by Google

ARITHMETICA UNIVERSALIS;

SIVE

DE

COMPOSITIONE

ET

RESOLUTIONE

ARITHMETICA

LIBER.

Auctore IS. NEWTON, Eq. Aur.



LUGDUNI BATAVORUM,

Apud JOH. ET HERM. VERBEEK, Bibliopolæ

MDCCXXXII.

Digitized by Google

Digitized by Google

G. J. 'S GRAVESANDE

L. S.

Liber hicce prima vice, inſcio Auctore, & ipſo hoc ægre ferente, editus fuit Cantabrigiæ anno 1707.

Secunda vice in lucem prodiit Londini 1722; *ſed in ſtatu perfectiore, ut quis facile percipiat, non omnino fœtum abdicaſſe virum Celeberrimum; ordo propoſitionum non tantum mutatus eſt, ſed in ipſis ſolutionibus & demonſtrationibus correctiones multæ reperiuntur, non niſi ipſi Auctori tribuendæ.*

Secundam hanc editionem ſecuti fuimus, adjecto tamen monito primæ editioni præpoſito, & in ſecunda ſuppreſſo. Singulaſque ſchedas totius operis, ab alio jam correctas, ipſi, antequam prælo ſubjicerentur, examinavimus & legimus.

Nihil in laudem operis dicam, nomen Auctoris in titulo legitur, & hoc quidem ſatis eſt. Non ego editionem dirigere ſuſcepiſſem, niſi librum magni facerem, jam etiam quid de ipſo ſentiam explicavi ſatis in Præfatione ad Specimen Commentarii in hunc ipſum; quod Specimen habetur ad calcem libelli noſtri cui titulus Matheſeos Univerſalis Elementa.

PRÆFATIO.

Cum Newtoni Arithmetica primum in lucem prodiret, adjecerat Editor, propter convenientiam materiæ, Halleii Methodum extrahendi radices Æquationum, deſumtam ex Transactionibus Philoſophicis Societatis Regiæ Londinenſis; Nos hoc exemplum ſecuti, non tantum hoc ſe Hallei ſcriptum, ſed omnia adjecimus, quæ in dictis Tranſactionibus reperiuntur, & quæ nobis ad Newtoni librum illuſtrandum utilia viſa ſunt. Quæ Anglico ſermone conſcripta erant latinè reddidit vir Rev. Joh. Petr. Bernard, viri Celeberrimi Jacobi Bernard, in hac noſtra Academia Batava Profeſſoris Philoſophiæ & Matheſ. digniſſimi & Collegæ noſtri dum viveret conjunctiſſimi, filius.

AD

Digitized by Google

MONITUM
PRIMÆ EDITIONI PRÆMISSUM.

AD
LECTOREM.

CUM poſt haud paucos Doctorum Virorum in Arte Analytica tradenda labores Liber aliquis materia plenus, mole parvus, in regulis neceſſariis brevis, in exemplis certo conſilio electus longus, & primis Tyronum conatibus accommodatus etiamnum deſiderari videretur; interque κειμήλια noſtra Academica hujuſmodi Tractatus M. S. publicas Profeſſoris Mathematici tunc temporis Celeberrimi Prælectiones, triginta ſere abhinc annis in Scholis habitas continens, mihi ſtatim occurreret; Dedi Operam ut Libellus iſte imperfectus licet, & currente calamo pro officii urgentis ratione compoſitus, nec prælo ullatenus deſtinatus, tamen in uſum ſtudioſæ juventutis nunc in publicum prodiret. In quo quidem Quæſtiones haud paucæ è variis Scientiis adductæ multiplicem Arithmeticæ Uſum ſatis oſtendunt. Animad-

madvertendum tamen Conſtructiones illas ſive Geometricas ſive Mechanicas prope finem adpoſitas inveniendis ſolum duabus tribuſve Radicum figuris prioribus, uti ſuo loco dicitur, inſervire: Opus enim Cl. Autor ad umbilicum nunquam perduxit; Cubicarum Æquationum Conſtructionem hic loci tradidiſſe contentus; dum interea in animo habuerit Biquadraticarum aliarumque ſuperiorum poteſtatum Conſtructionem methodo generali exponendam adjicere, & qua ratione reliquæ Radicum Figuræ eſſent extrahendæ ſigillatim docere. Cum autem ſummo Viro hiſce minutiis poſtmodo vacare minime placuerit, defectum hunc aliunde ſupplere volui; atque eum in finem generalem planeque egregiam Cl. Halleji Æquationum Radices extrahendi methodum ex Actis noſtris Philoſophicis, exorata prius utrobique venia, huc transferendam judicavi. Vale Lector, & conatibus noſtris fave.

G. W.

Dabam Cantabrigiæ
III Kal. Mai.
A. D. MDCCVII.

INDEX

INDEX.

NEWTONI ARITHMETICA Pag. 3
De vocum quarundam & notarum ſignificatione — — — 4
De Additione — — — — — — — — — 11
De Subductione — — — — — — — — — — 14
De Multiplicatione — — — — — — — — 17
De Diviſione — — — — — — — — — 20
De Extractione Radicum — — — — — 28
De Reductione Fractionum ad minimos terminos — — — 36
De Inventione Diviſorum — — — — — 37
Do Reductione Fractionum ad communem Denominatorem — — 46
De Reductione Radicalium ad minimos terminos — — — 47
De Reductione Radicalium ad eandem denominationem — — 49
De Reductione Radicalium ad Simpliciores Radicales per extractionem Radicum. ibid.
De Forma Æquationis — — — — — — — — 52
De Concinnanda Æquatione ſolitaria. — — — — — 54
De exterminandis incognitis quantitatibus — — — — 57
De tollendis quantitatibus ſurdis ex Æquationibus — — 64
Quomodo quæſtio ad Æquationem redigatur — — — ibid.
Problemata Arithmetica ſedecim. — — — 67. & ſeqq.
Quomodo Quæſtiones Geometricæ ad Æquationem redigantur. 82
Problemata Geometrica ſexaginta & unum. — — 96 & ſeqq.
Quomodo Æquationes reſolvendæ ſunt — — — — — 179
De Natura Radicum Æquationis — — — — — — ibid.
De Transmutationibus Æquationum — — — — — — 187
De Limitibus Æquationum — — — — — — 192
Æquationum Reductio per diviſores ſurdos — — — — 197
Æquationum Conſtructio linearis — — — — — 212

Ed.

INDEX.

Ed. HALLEI Methodus inveniendi Radices Æquationum, ſine prævia reductione, ex N. 210. *pag.* 136. *Tranſactionum Philoſophicarum* 245

J. COLSON Æquationum Cubicarum & biquadraticarum, Geometrica & Mechanica Reſolutio univerſalis. Ex Tranſ. Philoſ. n. 309. *pag.* 2353 258

AD de MOIVRE Æquationum quarundam poteſtatis tertiæ, quintæ, ſeptimæ, &c. Reſolutio analytica. Ex Tranſ. Phil. N. 309. *pag.* 2368 270

Ed. HALLEI Conſtructio Æquationum tertiæ & quartæ Poteſtatis ope circuli & datæ Parabolæ. Ex Tranſ. Phil. N. 188. *p.* 335. 274

Ed. HALLEI Tractatulus de numero & Limitibus Radicum in Æquationibus ſolidis & biquadraticis. Ex Tranſ. Phil. N. 190. *p.* 387. 282

COLIN MAC LAURIN Epiſtola de Æquationibus in quibus dantur Radices impoſſibiles. Ex Tranſ. Phil. N. 394. *p.* 104. Angl. 298

EJUSDEM Secunda Epiſtola de Radicibus Æquationum; cum demonſtratione aliarum quarundam Regularum Algebræ. Ex Tranſ. Phil. N. 408. *pag.* 59. Angl. 305

GEORG. CAMPBELL. Methodus determinandi numerum Radicum impoſſibilium in Æquationibus affectis. Ex Tranſ. Phil. N. 404. *p.* 515. Angl. 333

I. NEW.

Digitized by Google

I. NEWTONI
ARITHMETICA UNIVERSALIS:
SIVE
DE
COMPOSITIONE
ET
RESOLUTIONE
ARITHMETICA
LIBER.

Digitized by Google

Digitized by Google

ARITHMETICA UNIVERSALIS,

SIVE

DE

COMPOSITIONE ET RESOLUTIONE

ARITHMETICA

LIBER.

COMPUTATIO vel fit per *numeros* ut in vulgari Arithmetica, vel per *ſpecies* ut Analyſtis mos eſt. Utraque iiſdem innititur fundamentis, & ad eandem metam collimat: *Arithmetica* quidem definite & particulariter, *Algebraica* autem indefinitè & univerſaliter; ita ut enuntiata ferè omnia quæ in hâc computatione habentur, & præſertim concluſiones, *Theoremata* dici poſſint. Verùm Algebra maximè præcellit quòd cùm in Arithmetica Quæſtiones tantùm reſolvantur progrediendo à datis ad quæſitas quantitates, hæc à quæſitis tanquam datis ad datas tanquam quæſitas quantitates plerumque regreditur; ut ad concluſionem aliquam, ſeu Æquationem, quocunque demum modo perveniatur, ex quâ quantitatem quæſitam elicere liceat. Eoque pacto conficiuntur difficillima Problemata quorum reſolutiones ex Arithmetica ſola fruſtra peterentur. Arithmetica tamen Algebræ in omnibus ejus operationibus ita ſubſervit, ut non niſi unicam perfectam *computandi Scientiam* conſtituere videantur; & utramque propterea conjunctim explicabo.

Quiſquis hanc Scientiam aggreditur, imprimis vocum & notarum

A 2 ſignifi-

ſignificationes intelligat, & fundamentales addiſcat operationes, Additionem nempe, Subductionem, Multiplicationem, Diviſionem, Extractionem Radicum, Reductiones fractionum & radicalium quantitatum, & modos ordinandi terminos Æquationum, ac incognitas quantitates (ubi plures ſunt) exterminandi. Deinde has operationes, reducendo Problemata ad æquationes, exerceat; & ultimò naturam & reſolutionem æquationum contempletur.

De Vocum quarundam & notarum ſignificatione.

PER *Numerum* non tam multitudinem unitatum quam abſtractam quantitatis cujuſvis ad aliam ejuſdem generis quantitatem quæ pro unitate habetur rationem intelligimus. Eſtque triplex; integer, fractus & ſurdus: *Integer* quem unitas metitur, *Fractus* quem unitatis pars ſubmultiplex metitur, & *Surdus* cui unitas eſt incommenſurabilis.

Integrorum numerorum notas (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,) & notarum, ubi plures inter ſe nectuntur, valores nemo non intelligit. Quemadmodum verò numeri in primo loco ante unitatem, ſive ad ſiniſtram, ſcripti denotant denas unitates, in ſecundo centenas, in tertio millenas, *&c.* Sic numeri in primo loco poſt unitatem ſcripti denotant decimas partes unitatis, in ſecundo centeſimas, in tertio milleſimas, *&c.* Hos autem dicimus Fractos *Decimales* quòd in ratione decimali perpetuò decreſcant. Et ad diſtinguendum integros à decimalibus interjici ſolet comma, vel punctum, vel etiam lineola. Sic numerus 732'|569, denotat ſeptingentas triginta duas unitates, una cum quinque decimis, ſex centeſimis, & novem milleſimis partibus unitatis. Qui & ſic 732,|569, vel ſic 732.569, vel etiam ſic 732|569, nonnunquam ſcribitur. Atque ita numerus 57104'2083, denotat quinquaginta ſeptem mille, centum & quatuor unitates; una cum duabus decimis, octo milleſimis, & tribus decimis milleſimis partibus unitatis. Et numerus 0'064 denotat ſex centeſimas & quatuor milleſimas partes. Surdorum & aliorum fractorum notæ in ſequentibus habentur.

Cum rei alicujus quantitas ignota eſt vel indeterminatè ſpectatur, ita ut per numeros non liceat exprimere, ſolemus per ſpeciem *aliquam ſeu literam*

literam deſignare. Et ſi quando cognitas quantitates tanquam indeterminatas ſpectemus, diſcriminis cauſa deſignamus initialibus Alphabetæ literis a, b, c, d, & incognitas finalibus z, y, x, &c. Aliqui pro cognitis ſubſtituunt conſonantes vel majuſculas literas, & vocales vel minuſculas pro incognitis.

Quantitates vel Affirmativæ *ſunt ſeu majores nihilo, vel* Negativæ *ſeu nihilo minores*. Sic in rebus humanis poſſeſſiones dici poſſunt bona affirmativa, debita vero bona negativa. Inque motu locali progreſſus dici poteſt motus affirmativus, & regreſſus motus negativus, quia prior auget & poſterior diminuit iter confectum. Et ad eundem modum in Geometria, ſi linea verſus plagam quamvis ducta pro affirmativa habeatur, negativa erit quæ verſus plagam oppoſitam ducitur. Veluti ſi AB dextrorſum ducatur, & BC ſiniſtrorſum; ac AB ſtatuatur affirmativa tunc BC pro negativa habebitur, eò quòd inter ducendum diminuit AB; redigitque vel ad breviorem AC, vel ad nullam ſi forte C inciderit in ipſum A, vel ad minorem nulla ſi BC longior fuerit quam AB de qua aufertur. *Negativæ* quantitati deſignandæ ſignum —, *Affirmativæ* ſignum + præfigi ſolet. Signum ∓ incertum eſt, & ſignum ± etiam incertum ſed priori contrarium. Tab. I. Fig. 1.

In aggregato quantitatum nota + ſignificat quantitatem ſuffixam eſſe cæteris addendam & nota — eſſe ſubducendam. Et has notas vocabulis *plus* & *minus* exprimere ſolemus. Sic $2+3$, ſive 2 plus 3; valet ſummam numerorum 2 & 3, hoc eſt 5. Et $5-3$, ſive 5 minus 3, valet differentiam quæ oritur ſubducendo 3 à 5, hoc eſt 2. Et $-5+3$ valet differentiam quæ oritur ſubducendo 5 à 3, hoc eſt -2. Et $6-1+3$ valet 8. Item $a+b$ valet ſummam quantitatum a & b: Et $a-b$ valet differentiam, quæ oritur ſubducendo b ab a. Et $a-b+c$ valet ſummam iſtius differentiæ & quantitatis c. Puta ſi a ſit 5, b 2, & c 8; tum $a+b$ valebit 7 & $a-b$ 3 & $a-b+c$ 11. Item $2a+3a$ valet $5a$. Et $3b-2a-b+3a$ valet $2b+a$; nam $3b-b$ valet $2b$ & $-2a+3a$ valet a, quorum aggregatum eſt $2b+a$. Et ſic in aliis. Hæ autem notæ + & — dicuntur *Signa*. Et ubi neutrum initiali quantitati præfigitur ſignum + ſubintelligi debet.

Multiplicatio propriè dicitur quæ fit per numeros integros, utpote quærendo novam quantitatem toties majorem quantitate multiplicanda quoties numerus multiplicans ſit major unitate. Sed aptioris vocabuli defectu Multiplicatio etiam dici ſolet quæ fit per fractos aut ſurdos numeros; quærendo novam quantitatem in ea quacunque ratione ad quantitatem multiplicandam quam habet multiplicator ad unitatem. Neque tantùm fit per abſtractos numeros ſed etiam per concretas quantitates, ut per lineas, ſuperficies, motum localem, pondera, &c. quatenus hæ ad aliquam ſui generis notam quantitatem tanquam unitatem relatæ, rationes numerorum exprimere poſſunt, & vices ſupplere. Quemadmodum ſi quantitas A multiplicanda ſit per lineam duodecim pedum, poſito quod linea bipedalis ſit unitas, producentur per iſtam multiplicationem 6 A, ſive ſexies A, perinde ac ſi A multiplicaretur per abſtractum numerum 6, ſiquidem 6 A ſit in ea ratione ad A quam habet linea duodecim pedum ad unitatem bipedalem. Atque ita ſi duas quaſvis lineas AC & AD per ſe multiplicare oportet, capiatur AB unitas, & agatur BC eique parallela DE, & AE productum erit hujus multiplicationis, eo quod ſit ad AD ut AC ad unitatem AB. Quin etiam mos obtinuit ut geneſis ſeu deſcriptio ſuperficiei per lineam ſuper alia linea ad rectos angulos moventem dicatur multiplicatio iſtarum linearum. Nam quamvis linea utcunque multiplicata non poſſit evadere ſuperficies, adeoque hæc ſuperficiei è lineis generatio longè alia ſit à multiplicatione, in hoc tamen conveniunt, quod numerus unitatum in alterutra linea, multiplicatus per numerum unitatum in altera, producat abſtractum numerum unitatum in ſuperficie lineis iſtis comprehenſa, ſi modò Unitas ſuperficialis definiatur, ut ſolet, Quadratum cujus latera ſunt unitates lineares. Quemadmodum ſi recta AB conſtet quatuor unitatibus & AC tribus, tum rectangulum AD conſtabit quater tribus ſeu duodecim unitatibus quadratis ut inſpicienti Schema patebit. Eſtque ſimilis analogia ſolidi & ejus quod continua trium quantitatum multiplicatione producitur. Et hinc viciſſim evenit quod vocabula *ducere*, *contentum*, *rectangulum*, *quadratum*, *cubus*, *dimenſio*, *latus*, & ſimilia quæ ad Geometriam ſpectant, Arith-

Tab. I. Fig 3.

Tab. I. Fig. 2.

Digitized by Google

Arithmeticis tribuantur operationibus. Nam per *quadratum*, vel *rectangulum*, vel *quantitatem duarum dimenſionum* non ſemper intelligimus ſuperficiem, ſed ut plurimùm quantitatem alterius cujuſcunque generis quæ multiplicatione aliarum duarum quantitatum producitur, & ſæpiſſimè lineam quæ producitur multiplicatione aliarum duarum linearum. Atque ità dicimus *Cubum* vel *Parallelepipedum*, vel *quantitatem trium dimenſionum* pro eo quod binis multiplicationibus producitur, *latus* pro radice, *ducere* pro multiplicare; & ſic in aliis.

Numerus ſpeciei alicui immediatè præfixus denotat ſpeciem illam toties ſumendam eſſe. Sic $2a$ denotat duo a, $3b$ tria b, $15x$ quindecim x.

Duæ vel plures ſpecies immediatè connexæ deſignant factum, *ſeu quantitatem quæ fit per multiplicationem omnium in ſe invicem.* Sic ab denotat quantitatem quæ fit multiplicando a per b. Et abx denotat quantitatem quæ fit multiplicando a per b, & factum illud per x. Puta ſi a ſit 2, & b ſit 3, & x ſit 5, tum ab erit 6 & abx 30.

Inter quantitates ſeſe multiplicantes, nota $\times$, vel vocabulum *in*, ad factum deſignandum nonnunquam interſcribitur. Sic 3×5 vel 3 in 5 denotat 15. Sed uſus harum notarum præcipuus eſt, ubi compoſitæ quantitates ſeſe multiplicant. Veluti ſi $y - 2b$ multiplicet $y + b$, terminos utriuſque multiplicatoris lineolà ſuperimpoſità connectimus & ſcribimus $\overline{y - 2b}$ in $\overline{y + b}$, vel $\overline{y - 2b} \times \overline{y + b}$.

Divisio propriè eſt quæ fit per numeros integros quærendo novam quantitatem toties minorem quantitate dividenda quoties unitas ſit minor Diviſore. Sed ob analogiam vox etiam uſurpari ſolet cum nova quantitas in ratione quacunque ad quantitatem dividendam quæritur quam habet unitas ad diviſorem; ſive diviſor ille ſit fractus aut ſurdus numerus aut alia cujuſvis generis quantitas. Sic ad dividendum lineam AB per lineam AC, exiſtente AB unitate; agenda eſt ED parallela CB, & erit AD Quotiens. Imò & Diviſio propter ſimilitudinem quandam dicitur cum rectangulum ad datam lineam tanquam Baſem applicatur ut inde noſcatur altitudo. Tab. I. Fig. 3.

Quantitas infra quantitatem cum lineola interjecta denotat quotum, *ſeu*

ſeu quantitatem quæ oritur ex diviſione ſuperioris quantitatis per inferiorem. Sic $\frac{6}{2}$ denotat quantitatem quæ oritur dividendo 6 per 2, hoc eſt 3: & $\frac{5}{8}$ quantitatem quæ oritur dividendo 5 per 8, hoc eſt octavam partem numeri 5: & $\frac{a}{b}$ denotat quantitatem quæ oritur dividendo a per b; puta ſi a ſit 15 & b 3, tum $\frac{a}{b}$ denotat 5. Et ſic $\frac{ab - bb}{a + x}$ denotat quantitatem quæ oritur dividendo $ab - bb$ per $a + x$. Atque ita in aliis. Hujuſmodi autem quantitates *fractiones* dicuntur, parſque ſuperior *Numerator*, ac inferior *Denominator*.

Aliquando Diviſor quantitati diviſæ, interjecto arcu, præfigitur. Sic ad deſignandum quantitatem quæ oritur ex diviſione $\frac{axx}{a+b}$ per $a - b$, ſcribi poteſt $\overline{a - b)}\ \frac{axx}{a+b}$.

Etſi multiplicatio per immediatam quantitatum conjunctionem denotari ſolet, tamen numerus integer ante numerum fractum denotat ſummam utriuſque. Sic $3\frac{1}{2}$ denotat tria cum ſemiſſe.

Si quantitas ſe ipſam multiplicet, numerus factorum, compendii gratia, ſuffigi ſolet. Sic pro aaa ſcribimus a^3, pro $aaaa$ ſcribimus a^4, pro $aaaaa$ ſcribimus a^5, & pro $aaabb$ ſcribimus a^3bb vel a^3b^2. Puta ſi a ſit 5 & b ſit 2, tum a^3 erit $5 \times 5 \times 5$ ſive 125, & a^4 erit $5 \times 5 \times 5 \times 5$ ſive 625, atque a^3b^2 erit $5 \times 5 \times 5 \times 2 \times 2$ ſive 500. Ubi nota quod numerus inter duas ſpecies immediatè ſcriptus, ad priorem ſemper pertinet. Sic 3 in quantitate a^3bb non denotat bb ter capiendum eſſe ſed a in ſe bis ducendum. Nota etiam quod hæ quantitates tot *dimenſionum* vel *poteſtatum* vel *dignitatum* eſſe dicuntur quot factoribus ſeu quantitatibus ſe multiplicantibus conſtant, & numerus ſuffixus vocatur *Index* poteſtatum vel dimenſionum. Sic aa eſt duarum dimenſionum vel poteſtatum, & a^3 trium, ut indicat ſuffixus numerus 3. Dicitur etiam aa quadratum, a^3 cubus, a^4 quadrato-quadratum, a^5 quadrato-cubus, a^6 cubo-cubus, a^7 quadrato-quadrato-cubus, & ſic porro. Et quantitas a ex cujus in ſe multiplicatio-

plicatione hæ poteſtates generantur dicitur earum *Radix*, nempe radix quadratica quadrati aa, cubica cubi a^3, &c.

Cùm autem radix per ſeipſam multiplicata producat quadratum, & quadratum illud iterum per radicem multiplicatum producat cubum, *&c.* erit (ex definitione Multiplicationis) ut unitas ad radicem, ita radix ad quadratum, & quadratum ad cubum, *&c.* Adeoque quantitatis cujuſcunque *radix quadratica* erit medium proportionale inter unitatem & quantitatem illam, & *radix cubica* primum è duobus mediè proportionalibus, & *radix quadrato-quadratica* primum è tribus, & ſic præterea. Duplici igitur affectione radices innoteſcunt, tum quod ſeipſas multiplicando producant ſuperiores poteſtates, tum quod ſint è mediis proportionalibus inter iſtas poteſtates & unitatem. Sic numeri 64 radicem quadraticam eſſe 8 & cubicam 4, vel ex eo patet quod 8×8 & $4 \times 4 \times 4$ valeant 64, vel quod ſit 1 ad 8 ut 8 ad 64, & 1 ad 4 ut 4 ad 16 & 16 ad 64. Et hinc ſi lineæ alicujus A B radix quadratica extrahenda eſt, produc eam (Tab. I. Fig. 4.) ad C ut ſit BC unitas, dein ſuper AC deſcribe ſemicirculum, & ad B erige perpendiculum huic circulo occurrens in D, eritque BD radix, quia media proportionalis eſt inter AB & unitatem BC.

Ad deſignandam radicem *alicujus quantitatis præfigi ſolet nota* $\surd$ *ſi radix ſit quadratica*, *&* $\surd 3:$ *Si ſit cubica*, *&* $\surd 4:$ *Si quadrato-quadratica*, &c. Sic $\surd 64$ denotat 8; & $\surd 3:64$ denotat 4; & $\surd aa$ denotat a; & $\surd ax$ denotat radicem quadraticam ex ax; & $\surd 3:4axx$ radicem cubicam ex $4axx$. Ut ſi a ſit 3, & x 12; tum $\surd ax$ erit $\surd 36$, ſeu 6; & $\surd 3:4axx$ erit $\surd 3:1728$, ſeu 12. Et hæ radices ubi non licet extrahere dicuntur *ſurdæ quantitates*, ut $\surd ax$; vel *ſurdi numeri*, ut $\surd 12$.

Nonnulli pro deſignanda quadratica poteſtate uſurpant q, pro cubica c, pro quadrato-quadratica qq, pro quadrato-cubica qc, &c. Et ad hunc modum pro quadrato, cubo, & quadrato-quadrato ipſius A, ſcribitur Aq, Ac, Aqq, &c. Et pro radice cubica ex $abb - x^3$ ſcribitur $\surd c: abb - x^3$. Alii alias notas adhibent, ſed quæ jam ferè exoleverunt.

Nota $=$ *deſignat quantitates hinc inde* æquales *eſſe*. Sic $x = b$ deſignat x æqualem eſſe b.

Nota : : *ſignificat quantitates hinc inde* proportionales *eſſe*. Sic $a.\,b : : c.\,d$, ſignificat eſſe a ad b ut c ad d. Et $a.\,b.\,e : : c.\,d.\,f$ eſſe a, b & e inter ſe ut ſunt c, d & f inter ſe reſpectivè, vel eſſe a ad c, b ad d & e ad f in eadem ratione.

Denique notarum quæ ex his componuntur interpretatio per Analogiam facile innoteſcit. Sic enim $\frac{3}{4}a^3bb$ denotat tres quartas partes ipſius a^3bb, & $3\frac{a}{c}$ ter $\frac{a}{c}$, & $7\sqrt{ax}$ ſepties $\sqrt{ax}$. Item $\frac{a}{b}x$ denotat id quod fit multiplicando x per $\frac{a}{b}$, & $\frac{5ee}{4a+9e}Z^3$ id quod fit multiplicando Z^3 per $\frac{5ee}{4a+9e}$, hoc eſt per Quotum exortum diviſione $5ee$ per $4a+9e$; & $\frac{2a^3}{9c}\sqrt{ax}$ id quod fit multiplicando $\sqrt{ax}$ per $\frac{2a^3}{9c}$; & $\frac{7\sqrt{ax}}{c}$ quotum exortum diviſione $7\sqrt{ax}$ per c; & $\frac{8a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$ quotum exortum diviſione $8a\sqrt{cx}$ per ſummam quantitatum $2a+\sqrt{cx}$. Et ſic $\frac{3axx-x^3}{a+x}$ denotat quotum exortum diviſione differentiæ $3axx-x^3$ per ſummam $a+x$, & $\sqrt{\frac{3axx-x^3}{a+x}}$ radicem ejus Quoti, & $\overline{2a+3c}\sqrt{\frac{3axx-x^3}{a+x}}$ id quod fit multiplicando radicem illam per ſummam $2a+3c$. Sic etiam $\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$ denotat radicem ſummæ quantitatum $\frac{1}{4}aa$ & bb & $\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}$ radicem ſummæ quantitatum $\frac{1}{2}a$ & $\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$, & $\frac{2a^3}{aa-zz}\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}$ radicem illam multiplicatam per $\frac{2a^3}{aa-zz}$. Et ſic in aliis.

Cæterum nota quod in hujuſmodi complexis quantitatibus non opus eſt ad ſignificationem ſingularum literarum ſemper attendere; ſed

ſed ſufficit in genere tantum intelligere, *e. g.* quod $\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}$ ſignificat radicem aggregati $\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$; quodcunque tandem prodeat illud aggregatum cum numeri vel lineæ pro literis ſubſtituuntur. Atque ita quod $\dfrac{\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}}{a-\sqrt{ab}}$ ſignificat quotum exortum diviſione quantitatis $\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}$ per quantitatem $a-\sqrt{ab}$, perinde ac ſi quantitates illæ ſimplices eſſent & cognitæ, etſi quænam ſint impræſentiarum prorſus ignoretur, & ad ſingularum partium conſtitutionem aut ſignificationem neutiquam attendatur. Id quod monendum eſſe duxi ne complexione terminorum Tyrones quaſi conterriti in limine hæreant.

DE ADDITIONE.

Numerorum, ubi *non ſunt admodum compoſiti*, Additio per ſe manifeſta eſt. Sic quod 7 & 9 ſeu 7 + 9 faciunt 16, & quod 11 + 15 faciunt 26 prima fronte patet. At in *magis compoſitis* opus peragitur *ſcribendo numeros ſerie deſcendente & ſummas columnarum ſigillatim colligendo*. Quemadmodum ſi numeri 1357 & 172 addendi ſunt, ſcribe alterutrum 172 infra alterum 1357 ita ut hujus unitates 2 alterius unitatibus 7 ſubjiciantur, cæterique numeri numeris correſpondentibus, nempe deni 7 denis 5, & centenus 1 centenis 3. Tum incipiendo ad dextram, dic 2 & 7 faciunt 9 quem ſcribe infra. Item 7 & 5 faciunt 12, cujus poſteriorem numerum 2 ſcribe infra, priorem vero 1 aſſerva proximis numeris 1 & 3 adjiciendum. Dic itaque præterea 1 & 1 faciunt 2, cui 3 adjectus facit 5, & ſcribe 5 infra, & manebit tantùm 1 prima figura ſuperioris numeri, quæ etiam infra ſcribenda eſt, & ſic habebitur ſumma 1529.

$$\begin{array}{r} 1357 \\ 172 \\ \hline 1529 \end{array}$$

Sic numeros 87899 + 13403 + 885 + 1920, quo in unam ſummam redigantur, ſcribe in ſerie deſcendente ita ut unitates unam co-

Digitized by Google

lumnam, deni numeri aliam, centeni tertiam, milleni quartam conſtituant, & ſic præterea. Deinde dic $5 + 3$ valent 8, & $8 + 9$ valent 17, ſcribeque 7 infra, & 1 adjice proximis numeris dicendo $1 + 8$ valent 9, $9 + 2$ valent 11, ac $11 + 9$ valent 20: Subſcriptoque 0, dic iterum ut ante $2 + 8$ valent 10, $10 + 9$ valent 19, $19 + 4$ valent 23, & $23 + 8$ valent 31, adeoque aſſervato 3 ſubſcribe 1 ut ante & iterum dic $3 + 1$ valent 4, $4 + 3$ valent 7, & $7 + 7$ valent 14. Quare ſubſcribe 4, denuoque dic $1 + 1$ valent 2, & $2 + 8$ valent 10, quem ultimò ſubſcribe, & omnium ſummam habebis 104107.

87899
13403
1920
885
104107

Ad eundem modum numeri decimales adduntur ut in annexo paradigmate videre eſt.

630'953
51'0807
305'27
987'3037

In terminis Algebraicis Additio *fit connectendo quantitates addendas cum ſignis propriis, & inſuper uniendo quæ poſſunt uniri.* Sic a & b faciunt $a + b$; a & $-b$ faciunt $a - b$; $-a$ & $-b$ faciunt $-a - b$; $7a$ & $9a$ faciunt $7a + 9a$; $-a\sqrt{ac}$ & $b\sqrt{ac}$ faciunt $-a\sqrt{ac} + b\sqrt{ac}$ vel $b\sqrt{ac} - a\sqrt{ac}$, nam perinde eſt quo ordine ſcribantur.

Quantitates affirmativæ quæ ex parte ſpecierum conveniunt, uniuntur addendo numeros præfixos quibus ſpecies multiplicantur. Sic $7a + 9a$ faciunt $16a$. Et $11bc + 15bc$ faciunt $26bc$. Item $3\frac{a}{c} + 5\frac{a}{c}$ faciunt $8\frac{a}{c}$, & $2\sqrt{ac} + 7\sqrt{ac}$ faciunt $9\sqrt{ac}$, & $6\sqrt{ab - xx} + 7\sqrt{ab - xx}$ faciunt $13\sqrt{ab - xx}$. Et ad eundem modum $6\sqrt{3} + 7\sqrt{3}$ faciunt $13\sqrt{3}$. Quinctiam $a\sqrt{ac} + b\sqrt{ac}$ faciunt $\overline{a+b}\sqrt{ac}$, additis nempe a & b tanquam ſi eſſent numeri multiplicantes $\sqrt{ac}$. Et ſic $\overline{2a + 3c}\sqrt{\frac{3axx - x^3}{a+x}} + 3a\sqrt{\frac{3axx - x^3}{a+x}}$ faciunt $\overline{5a + 3c}\sqrt{\frac{3axx - x^3}{a+x}}$ eo quod $2a + 3c$ & $3a$ faciant $5a + 3c$

Fractio-

Digitized by Google

Fractiones affirmativæ quarum idem eſt denominator, uniuntur addendo numeratores. Sic $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$ faciunt $\frac{3}{3}$, & $\frac{2ax}{b} + \frac{3ax}{b}$ faciunt $\frac{5ax}{b}$ & $\frac{8a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}} + \frac{17a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$ faciunt $\frac{25a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$, & $\frac{aa}{c} + \frac{bx}{c}$ faciunt $\frac{aa+bx}{c}$.

Negativæ quantitates eodem modo adduntur ac affirmativæ. Sic -2 & -3 faciunt -5; $-\frac{4ax}{b}$ & $-\frac{11ax}{b}$ faciunt $-\frac{15ax}{b}$; $-a\sqrt{ax}$ & $-b\sqrt{ax}$ faciunt $-\overline{a-b}\sqrt{ax}$. Ubi verò *negativa quantitas affirmativæ adjicienda eſt*, oportet affirmativam negativa diminuere. Sic 3 & -2 faciunt 1; $\frac{11ax}{b}$ & $-\frac{4ax}{b}$ faciunt $\frac{7ax}{b}$; $-a\sqrt{ac}$ & $b\sqrt{ac}$ faciunt $\overline{b-a}\sqrt{ac}$. Et nota quod ubi negativa quantitas excedit affirmativam, aggregatum erit negativum. Sic 2 & -3 faciunt -1; $-\frac{11ax}{b}$ & $\frac{4ax}{b}$ faciunt $-\frac{7ax}{b}$, ac $2\sqrt{ac}$ & $-7\sqrt{ac}$ faciunt $-5\sqrt{ac}$.

In additione aut plurium aut magis compoſitarum quantitatum, convenit obſervare formam operationis ſupra in additione numerorum expoſitam. Quemadmodum ſi $17ax - 14a + 3$, & $4a + 2 - 8ax$ & $7a - 9ax$ addendæ ſunt, diſpono eas in ſerie deſcendente ita ſcilicet ut termini maxime affines ſtent in iiſdem columnis. Nempe numeri 3 & 2 in una columna, ſpecies $-14a$ & $4a$ & $7a$ in alia columna, atque ſpecies $17ax$ & $-8ax$ & $-9ax$ in tertia. Dein terminos cujuſque columnæ ſigillatim addo dicendo 2 & 3 faciunt 5 quod ſubſcribo, dein $7a$ & $4a$ faciunt $11a$ & inſuper $-14a$ facit $-3a$ quod iterum ſubſcribo, denique $-9ax$ & $-8ax$ faciunt $-17ax$ & inſu-

$$\begin{array}{rrr} 17ax & -14a & +3 \\ -8ax & +4a & +2 \\ -9ax & +7a & \\ \hline * & -3a & +5 \end{array}$$

inſuper 17 ax facit o. Adeoque prodit ſumma $-3a+5$.
Eadem methodo res in ſequentibus exemplis abſolvitur.

$$\begin{array}{lll} 12x+7a & 11bc-7\sqrt{ac} & -\frac{4ax}{b}+6\sqrt{3}+\frac{3}{7} \\ 7x+9a & 15bc+2\sqrt{ac} & +\frac{11ax}{b}-7\sqrt{3}+\frac{2}{7} \\ \hline 19x+16a & 26bc-5\sqrt{ac} & \frac{7ax}{b}-\sqrt{3}+\frac{5}{7} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -6xx+\frac{3}{7}x \\ 5x^3\quad+\frac{5}{7}x \\ \hline 5x^3-6xx+\frac{8}{7}x \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr} & & aay & +2a^3 & -\frac{a^4}{2y} \\ & -2ayy & -4aay & +a^3 & \\ y^3 & +2ayy & -\frac{1}{2}aay & & \\ \hline y^3 & * & -3\frac{1}{2}aay & +3a^3 & -\frac{a^4}{2y} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrl} 5x^4 & +2ax^3 & & \\ -3x^4 & -2ax^3 & +8\frac{1}{4}a^3 & \sqrt{aa+xx} \\ -2x^4 & +5bx^3 & -20a^3 & \sqrt{aa-xx} \\ & -4bx^3 & -7\frac{1}{4}a^3 & \sqrt{aa+xx} \\ \hline * & +bx^3 & +a^3 & \sqrt{aa+xx} \\ & & -20a^3 & \sqrt{aa-xx}. \end{array}$$

DE SUBDUCTIONE.

Numerorum *non nimis compoſitorum* inventio etiam Differentiæ per ſe patet. Quemadmodum quod 9 de 17 relinquat 8. At in *magis compoſitis* Subductio fieri ſolet *ſubſcribendo numerum ablativum & ſigillatim auferendo figuras inferiores de ſuperioribus*. Sic ad auferendum 63543 de 782579, ſubſcripto 63543, dic 3 de 9 relinquit 6, quod ſcribe infra: Dein 4 de 7 relinquit 3 quod pariter ſcribe infra: Tum 5 de 5 relinquit o quod itidem ſubſcribe: Poſtea 3 de 2 auferendum eſt, ſed cum 3 ſit majus, figura 1 à proxima figura 8 mutuò

$$\begin{array}{r} 782579 \\ 63543 \\ \hline 719036 \end{array}$$

ſumi

ſumi debet, quæ una cum 2 faciat 12, à quo auferri poteſt 3, & reſtat 9, quod inſuper ſubſcribe: Adhæc cùm præter 6 etiam 1 de 8 auferendum ſit, adde 1 ad 6, & ſumma 7 de 8 relinquet 1 quod etiam ſubſcribe. Denique cùm in inferiori numero nihil reſtet auferendum de ſuperiori 7, ſubſcribe etiam 7, & ſic tandem habes differentiam 719036.

Cæterùm omnino cavendum eſt ut figuræ numeri ablativi ſubſcribantur in locis homogeneis; nempe unitates infra alterius numeri unitates, deni numeri infra denos, decimæ partes infra decimas, *&c.* Sicut in Additione dictum eſt. Sic ad auferendum decimalem 0'63 ab integro 547, non diſpones numeros hoc modo $\begin{smallmatrix}547\\0'63\end{smallmatrix}$; ſed ſic $\begin{smallmatrix}547\\0'63\end{smallmatrix}$, ita nempe ut circulus qui locum unitatum in decimali occupat, ſubjiciatur unitatibus alterius numeri. Tum, circulis in locis vacuis ſuperioris numeri ſubintellectis, dic 3 de 0 auferendum eſſe, ſed cùm nequeat, debet 1 de loco anteriori mutuo ſumi ut 0 evadat 10 à quo 3 auferri poteſt & dabit 7, quod infra ſcribe. Dein illud 1 quod mutuò ſumitur, adjectum 6 facit 7, & hoc de ſuperiore 0 auferendum eſt; ſed cùm nequeat, debet iterum 1 de loco anteriori ſumi ut 0 evadat 10, & 7 de 10 relinquet 3, quod ſimiliter infra ſcribendum eſt. Tum illud 1 adjectum 0 facit 1, & hoc 1 de 7 relinquit 6, quod itidem ſubſcribe. Denique figuras etiam 54, ſiquidem de illis nihil amplius auferendum reſtat, ſubſcribe, & habebis reſiduum 546'37.

$$\begin{array}{r}547\\0'63\\\hline 546'37\end{array}$$

Exercitationis gratia plura tum in integris tum in decimalibus numeris exempla ſubjecimus.

1673	1673	458074	35'72	46,5003	308,7
1541	1580	9205	14'32	3,078	25,74
132	93	448869	21'4	43,4223	282,96

Siquando major numerus de minori auferendus eſt, oportet minorem de majore auferre, & reſiduo præfigere negativum ſignum. Veluti ſi auferendum ſit 1673 de 1541, è contra aufero 1541 de 1673, & reſiduo 132 præfigo ſignum —.

In terminis Algebraicis Subductio *fit connectendo quantitates cum ſignis omnibus quantitatis ſubducendæ mutatis, & inſuper uniendo quæ*

poſſunt

poſſunt uniri, perinde ut in Additione factum eſt. Sic $+7a$ de $+9a$ relinquit $+9a-7a$ ſive $2a$; $-7a$ de $+9a$ relinquit $+9a+7a$ ſive $16a$; $+7a$ de $-9a$ relinquit $-9a-7a$ ſive $-16a$; & $-7a$ de $-9a$ relinquit $-9a+7a$ ſive $-2a$. Sic $3\frac{a}{c}$ de $5\frac{a}{c}$ relinquit $2\frac{a}{c}$; $7\sqrt{ac}$ de $2\sqrt{ac}$ relinquit $-5\sqrt{ac}$; $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ relinquit $\frac{1}{12}$; $-\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ relinquit $\frac{17}{12}$; $-\frac{2ax}{b}$ de $\frac{3ax}{b}$ relinquit $\frac{5ax}{b}$; $\frac{8a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$ de $\frac{-17a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$ relinquit $\frac{-25a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$; $\frac{aa}{c}$ de $\frac{bx}{c}$ relinquit $\frac{bx-aa}{c}$; $a-b$ de $2a+b$ relinquit $2a+b-a+b$ ſive $a+2b$; $3az-zz+ac$ de $3az$ relinquit $3az-3az+zz-ac$ ſive $zz-ac$; $\frac{2aa-ab}{c}$ de $\frac{aa+ab}{c}$ relinquit $\frac{aa+ab-2aa+ab}{c}$ ſive $\frac{-aa+2ab}{c}$: Et $\overline{a-x}\sqrt{ax}$ de $\overline{a+x}\sqrt{ax}$ relinquit $\overline{a+x-a+x}\sqrt{ax}$ ſive $2x\sqrt{ax}$. Et ſic in aliis.

Cæterùm ubi quantitates pluribus terminis conſtant, operatio perinde ac in numeris inſtitui poteſt. Id quod in ſequentibus exemplis videre eſt.

$$\begin{array}{r} 12x+7a \\ 7x+9a \\ \hline 5x-2a \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15bc+2\sqrt{ac} \\ -11bc+7\sqrt{ac} \\ \hline 26bc-5\sqrt{ac} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 5x^3+\frac{4}{7}x \\ 6xx-\frac{3}{7}x \\ \hline 5x^3-6xx+\frac{7}{7}x \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \frac{11ax}{b}-7\sqrt{3}+\frac{2}{3} \\ \frac{4ax}{b}-6\sqrt{3}-\frac{1}{3} \\ \hline \frac{7ax}{b}-\sqrt{3}+\frac{3}{3} \end{array}$$

DE

DE MULTIPLICATIONE.

Numeri qui ex Multiplicatione duorum quorumvis numerorum non majorum quàm 9 oriuntur, memoriter addiſcendi ſunt. Veluti quod 5 in 7, facit 35, quòdque 8 in 9 facit 72, &c. Deinde majorum numerorum multiplicatio ad horum exemplorum normam inſtituetur.

Si 795 per 4 multiplicare oportet ſubſcribe 4, ut vides. Dein dic, 4 in 5 facit 20, cujus poſteriorem figuram o ſcribe infra 4, priorem vero 2 reſerva in proximam operationem. Dic itaque præterea 4 in 9 facit 36, cui adde præfatum 2 & fit 38, cujus poſteriorem figuram 8 ut ante ſubſcribe, & priorem 3 reſerva. Denique dic 4 in 7 facit 28 cui adde prædictum 3 & fit 31. Eoque pariter ſubſcripto habebitur 3180 numerus qui prodit multiplicando totum 795 per 4.

```
 795
   4
----
3180
```

Porrò ſi 9043 multiplicandus eſt per 2305, ſcribe alterutrum 2305 infra alterum 9043 ut ante, & multiplica ſuperiorem 9043 primò per 5 pro more oſtenſo, & emerget 45215, dein per o & emerget 0000, tertiò per 3 & emerget 27129, denique per 2 & emerget 18086. Hoſque ſic emergentes numeros in ſerie deſcendente ita ſcribe, ut cujuſque inferioris ultima figura ſit uno loco propior ſiniſtræ quàm ultima ſuperioris. Tandem hos omnes adde & orietur 20844115, numerùs qui fit multiplicando totum 9043 per totum 2305.

```
    9043
    2305
   45215
   0000
 27129
18086
--------
20844115
```

Decimales numeri per integros vel per alios decimales perinde multiplicantur, ut vides in his exemplis.

```
  72,4        50,18        3,9025
  29          2,75         0,0132
------      -------      ----------
  6516        25000         78050
 1448        35126        117075
------      10036        39025
 2099,6     -------      ----------
             137,9950    0,05151300
```

C

Sed

Sed nota quod *in prodeunte numero tot ſemper figuræ ad dextram pro decimalibus abſcindi debent quot ſunt figuræ decimales in utroque numero multiplicante.* Et ſi fortè non ſint tot figuræ in prodeunte numero, deficientes loci circulis adimplendi ſunt, ut hic fit in exemplo tertio.

Simplices termini Algebraici multiplicantur ducendo numeros in numeros & ſpecies in ſpecies ac ſtatuendo factum Affirmativum *ſi ambo factores ſint affirmativi aut ambo negativi,* & Negativum *ſi ſecus.*

Sic $2a$ in $3b$ vel $-2a$ in $-3b$ facit $6ab$; vel $6ba$: Nihil enim refert quo ordine ponantur. Sic etiam $2a$ in $-3b$ vel $-2a$ in $3b$ facit $-6ab$. Et ſic $2ac$ in $8bcc$ facit $16abccc$ ſive $16abc^3$; & $7axx$ in $-12aaxx$ facit $-84a^3x^4$; & $-16cy$ in $31ay^3$ facit $-496acy^4$; & $-4z$ in $-3\sqrt{az}$ facit $12z\sqrt{az}$. Atque ita 3 in -4 facit -12 & -3 in -4 facit 12.

Fractiones multiplicantur ducendo numeratores in numeratores ac denominatores in denominatores. Sic $\frac{2}{5}$ in $\frac{3}{7}$ facit $\frac{6}{35}$; & $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ facit $\frac{ac}{bd}$; & $2\frac{a}{b}$ in $3\frac{c}{d}$ facit $6 \times \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ ſeu $6\frac{ac}{bd}$; & $\frac{3acy}{2bb}$ in $\frac{-7cyy}{4b^3}$ facit $\frac{-21accy^3}{8b^5}$; & $\frac{-4z}{c}$ in $\frac{-3\sqrt{az}}{c}$ facit $\frac{12z\sqrt{az}}{cc}$ & $\frac{a}{b}x$ in $\frac{c}{d}xx$ facit $\frac{ac}{bd}x^3$. Item 3 in $\frac{2}{5}$ facit $\frac{6}{5}$ ut patet ſi 3 reducatur ad formam fractionis $\frac{3}{1}$ adhibendo unitatem pro Denominatore. Et ſic $\frac{15aaz}{cc}$ in $2a$ facit $\frac{30a^3z}{cc}$. Unde obiter nota quod $\frac{ab}{c}$ & $\frac{a}{c}b$ idem valent; ut & $\frac{abx}{c}$, $\frac{ab}{c}x$ & $\frac{a}{c}bx$ nec non $\frac{\overline{a+b}\sqrt{cx}}{a}$ & $\frac{a+b}{a}\sqrt{cx}$, & ſic in aliis.

Quantitates radicales ejuſdem denominationis (hoc eſt, ſi ſint ambæ radices quadraticæ, aut ambæ cubicæ, aut ambæ quadrato-quadraticæ, &c.) multiplicantur ducendo terminos in ſe invicem ſub eodem ſigno radicali. Sic $\sqrt{3}$ in $\sqrt{5}$ facit $\sqrt{15}$, & $\sqrt{ab}$ in $\sqrt{cd}$ facit $\sqrt{abcd}$.

Et

Et $\sqrt{3:}\,5ayy$ in $\sqrt{3:}\,7ayz$ facit $\sqrt{3:}\,35aay^3z$. Et $\sqrt{\frac{a^3}{c}}$ in $\sqrt{\frac{abb}{c}}$ facit $\sqrt{\frac{a^4bb}{cc}}$ hoc eſt* $\frac{aab}{c}$. Et $2a\sqrt{az}$ in $3b\sqrt{az}$ facit $6ab\sqrt{aazz}$ hoc eſt $6aabz$. Et $\frac{3xx}{\sqrt{ac}}$ in $\frac{-2x}{\sqrt{ac}}$ facit $\frac{-6x^3}{\sqrt{aacc}}$ hoc eſt $\frac{-6x^3}{ac}$. Et $\frac{-4x\sqrt{ab}}{7a}$ in $\frac{-3dd\sqrt{5cx}}{10ee}$ facit $\frac{12ddx\sqrt{5abcx}}{70aee}$.

* Vide Cap. *De Notatione.*

Quantitates pluribus partibus conſtantes multiplicantur ducendo ſingulas unius partes in ſingulas alterius, perinde ut in Multiplicatione numerorum oſtenſum eſt. Sic $c-x$ in a facit $ac-ax$, & $aa+2ac-bc$ in $a-b$ facit $a^3+2aac-aab-3bac+bcc$. Nam $aa+2ac-bc$ in $-b$ facit $-aab-2acb+bbc$, & in a facit $a^3+2aac-abc$, quorum ſumma eſt $a^3+2aac-aab-3abc+bbc$. Hujus multiplicationis ſpecimen unà cum aliis conſimilibus exemplis ſubjectum habes.

$$\begin{array}{r} aa+2ac-bc \\ a-b \\ \hline -aab-2abc+bbc \\ a^3+2aac-abc \quad\quad \\ \hline a^3+2aac-aab-3abc+bbc \end{array} \qquad \begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline ab+bb \\ aa+ab \quad\; \\ \hline aa+2ab+bb \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ \hline -ab-bb \\ aa+ab \quad\quad \\ \hline aa \;\; * \;-bb \end{array} \qquad \begin{array}{r} yy+2ay-\frac{1}{2}aa \\ yy-2ay+aa \\ \hline aayy+2a^3y-\frac{1}{2}a^4 \\ -2ay^3-4aayy+a^3y \quad\quad \\ y^4+2ay^3-\frac{1}{2}aayy \quad\quad\quad\quad\quad\quad \\ \hline y^4 \;\; * \;-3\frac{1}{2}aayy+3a^3y-\frac{1}{2}a^4 \end{array}$$

$$\frac{2ax}{c} - \sqrt{\frac{a^3}{c}}$$

$$3a + \sqrt{\frac{abb}{c}}$$

$$\frac{2ax}{c}\sqrt{\frac{abb}{c}} - \frac{aab}{c}$$

$$\frac{6aax}{c} - 3a\sqrt{\frac{a^3}{c}}$$

$$\frac{6aax}{c} - 3a\sqrt{\frac{a^3}{c}} + \frac{2ax}{c}\sqrt{\frac{abb}{c}} - \frac{aab}{c}.$$

DE DIVISIONE.

Diviſio in numeris inſtituitur quærendo quot vicibus Diviſor in Dividendo continetur, totieſque auferendo, & ſcribendo totidem unitates in Quoto. Idque iteratò ſi opus eſt, quamdiu diviſor auferri poteſt.

Sic ad dividendum 63 per 7, quære quoties 7 continetur in 63 & emergent 9 pro quoto præciſè. Adeoque $\frac{63}{7}$ valet 9. Inſuper ad dividendum 371 per 7, præfige diviſorem 7, & imprimis opus inſtituens in initialibus figuris Dividendi proximè majoribus Diviſore, nempe in 37, dic quoties 7 continetur in 37? Reſp. 5. Tum ſcripto 5 in Quoto, aufer 5 × 7 ſeu 35 de 37, & reſtabit 2, cui adnecte ultimam figuram Dividendi nempe 1, & fit 21 reliqua pars Dividendi, in qua proximum opus inſtituendum eſt. Dic itaque ut ante quoties 7 continetur in 21? Reſp. 3. Quare ſcripto 3 in Quoto, aufer 3 × 7 ſeu 21 de 21 & reſtabit 0. Unde conſtat 53 eſſe numerum præciſè. qui oritur ex diviſione 371 per 7.

```
7) 371 (53
   35
    21
    21
     0
```

Atque ita ad dividendum 4798 per 23, opus primò inſtituens in initialibus figuris 47 dic quoties 23 continetur in 47? Reſp. 2. Scribe ergo 2 in Quoto, & de 47 ſubduc 2 × 23 ſeu 46, reſtatque 1, cui ſubjunge proximum numerum Dividendi, nempe 9, & fit 19 in ſubſequens

ſequens opus. Dic itaque quoties 23 continetur in 19? Reſp. 0. Quare ſcribe 0 in Quoto; & de 19 ſubduc 0 × 23 ſeu 0; & reſtat 19, cui ſubjunge ultimum numerum 8, & fit 198 in proximum opus. Quamobrem dic ultimò quoties 23 continetur in 198, (id quod ex initialibus numeris 2 & 19 conjici poteſt animadvertendo quoties 2 continetur in 19)? Reſp. 8. Quare ſcribe 8 in Quoto & de 198 ſubduc 8 × 23 ſeu 184, reſtabitque 14 adhuc dividendus per 23. Adeoque Quotus erit 208$\frac{14}{23}$. Quod ſi hujuſmodi fractio minùs placeat, poſſis Diviſionem in Fractionibus decimalibus ultra ad libitum proſequi, ſemper adnectendo circulum numero reſiduo. Sic reſiduo 14 adnecte 0, fitque 140. Tum dic quoties 23 ſit in 140? Reſp. 6. Scribe ergo 6 in Quoto; & de 140 ſubduc 6 × 23 ſeu 138, & reſtabit 2, cui adnecte 0 ut ante. Et ſic, opere ad arbitrium continuato, emerget tandem Quotus 208,6086, &c.

23) 4798 (208,6086, &c.
46
——
19
00
——
198
184
——
140
138
——
20
00
——
200
184
——
160

Ad eundem modum fractio decimalis 3,5218 per fractionem decimalem 46,1 dividitur, & prodit 0,07639, &c. *Ubi nota quod in Quoto tot figuræ pro decimalibus abſcindendæ ſunt quot ſunt in ultimo dividuo plures quam in diviſore:* Ut in hoc exemplo quinque, quia ſex ſunt in ultimo dividuo 0,004370 & una in Diviſore 46,1.

46,1) 3,5218 (0,07639
322,7
——
2948
2766
——
1820
1383
——
4370

Digitized by Google

Exempla plura lucis gratia ſubjunximus.

```
9043) 20844115 (2305.          72,4) 2099,6 (29
      18086                           1448
      -----                           ----
      27581                            6516
      27129                            6516
      -----                            ----
        45215                             0
        45215
        -----
            0

50,18) 137,995 (2,75.          0,0132) 0,051513 (3,9025
       10036                            396
       -----                            ---
       37635                            1191
       35126                            1188
       -----                            ----
        25090                             330
        25090                             264
        -----                             ---
            0                              660
                                           660
                                           ---
                                             0
```

In terminis Algebraicis Diviſio fit reſolvendo quicquid per multiplicationem conflatur. Sic ab diviſ. per a dat b pro quoto, $6ab$ div. per $2a$ dat $3b$; & div. per $-2a$ dat $-3b$. $-6ab$ div. per $2a$ dat $-3b$; & div. per $-2a$ dat $3b$. $16abc^3$ div. per $2ac$ dat $8bcc$. $-84a^3x^4$ div. per $-12aaxx$ dat $7axx$. Item $\frac{6}{35}$ div. per $\frac{3}{5}$ dat $\frac{2}{7}$. $\frac{ac}{bd}$ div. per $\frac{a}{b}$ dat $\frac{c}{d}$. $\frac{-21accy^3}{8b^5}$ div. per $\frac{3acy}{2bb}$ dat $\frac{-7cyy}{4b^3}$. $\frac{6}{7}$ div. per 3 dat $\frac{2}{7}$; & viciſſim $\frac{6}{7}$ div. per $\frac{2}{7}$ dat $\frac{3}{1}$ ſeu 3. $\frac{30a^3z}{cc}$ div. per $2a$ dat $\frac{15aaz}{cc}$; & viciſſim diviſ. per $\frac{15aaz}{cc}$ dat $2a$. Item $\sqrt{15}$ div. per $\sqrt{3}$ dat $\sqrt{5}$. $\sqrt{abcd}$ div. per $\sqrt{cd}$ dat $\sqrt{ab}$. $\sqrt{a^3c}$ per

per $\sqrt{ac}$ dat $\sqrt{aa}$ ſeu a. $\sqrt{3}: 35aay^3z$ div. per $\sqrt{3}: 5ayy$ dat $\sqrt{3}: 7ayz$. $\sqrt{\frac{a^4bb}{cc}}$ div. per $\sqrt{\frac{a^3}{c}}$ dat $\sqrt{\frac{abb}{c}}$. $\frac{12ddx\sqrt{5abcx}}{704ee}$ div. per $\frac{-3dd\sqrt{5cx}}{10ee}$ dat $\frac{-4x\sqrt{ab}}{7a}$. Atque ita $\overline{a+b}\sqrt{ax}$ div. per $a+b$ dat $\sqrt{ax}$, & viciſſim div. per $\sqrt{ax}$ dat $a+b$. Et $\frac{a}{a+b}\sqrt{ax}$ div. per $\frac{1}{a+b}$ dat $a\sqrt{ax}$; vel div. per a dat $\frac{1}{a+b}\sqrt{ax}$ ſive $\frac{\sqrt{ax}}{a+b}$; & viciſſim div. per $\frac{\sqrt{ax}}{a+b}$ dat a. Cæterùm in hujuſmodi reſolutionibus omninò cavendum eſt ut quantitates ſint ejuſdem ordinis quæ ad invicem applicantur. Nempe ut numeri applicentur ad numeros, ſpecies ad ſpecies, radicales ad radicales, Numeratores Fractionum ad Numeratores ac Denominatores ad Denominatores, nec non in Numeratoribus, Denominatoribus, & Radicalibus quantitates cujuſque generis ad quantitates homogeneas.

Quod ſi quantitas dividenda nequeat ſic per diviſorem reſolvi, ſufficit ubi ambæ quantitates ſunt integræ ſubſcribere Diviſorem cum lineola interjecta. Sic ad dividendum ab per c ſcribitur $\frac{ab}{c}$; & ad dividendum $\overline{a+b}\sqrt{cx}$ per a ſcribitur $\frac{\overline{a+b}\sqrt{cx}}{a}$ vel $\frac{a+b}{a}\sqrt{cx}$. Et ſic $\sqrt{ax-xx}$ diviſ. per $\sqrt{cx}$ dat $\frac{\sqrt{ax-xx}}{\sqrt{cx}}$ ſive $\sqrt{\frac{ax-xx}{cx}}$. Et $\overline{aa+ab}\sqrt{aa-2xx}$ diviſ. per $\overline{a-b}\sqrt{aa-xx}$ dat $\frac{aa+ab}{a-b}\sqrt{\frac{aa-2xx}{aa-xx}}$. Et $12\sqrt{5}$ div. per $4\sqrt{7}$ dat $3\sqrt{\frac{5}{7}}$.

Ubi vero fractæ ſunt illæ quantitates, Duc Numeratorem Dividendæ quantitatis in Denominatorem Diviſoris ac Denominatorem in Numeratorem, & *factus prior* erit Numerator, ac *poſterior* Denominator

nator Quoti. Sic ad dividendum $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{d}$ ſcribitur $\frac{ad}{bc}$, multiplicato ſcilicet a per d & b per c. Parique ratione $\frac{3}{5}$ diviſ. per $\frac{4}{7}$ dat $\frac{21}{20}$ & $\frac{3a}{4c}\sqrt{ax}$ diviſ. per $\frac{2c}{5a}$ dat $\frac{15aa}{8cc}\sqrt{ax}$; diviſ. autem per $\frac{2c\sqrt{aa-xx}}{5a\sqrt{ax}}$ dat $\frac{15a^3x}{8cc\sqrt{aa-xx}}$. Et ad eundem modum $\frac{ad}{b}$ diviſ. per c (ſive per $\frac{c}{1}$) dat $\frac{ad}{bc}$. Et c (ſive $\frac{c}{1}$) diviſ. per $\frac{ad}{b}$ dat $\frac{bc}{ad}$. Et $\frac{3}{5}$ div. per 5 dat $\frac{3}{25}$. Et 3 div. per $\frac{5}{4}$ dat $\frac{12}{5}$. Et $\frac{a+b}{c}\sqrt{cx}$ div. per a dat $\frac{a+b}{ac}\sqrt{cx}$. Et $\overline{a+b}\sqrt{cx}$ div. per $\frac{a}{c}$ dat $\frac{ac+bc}{a}\sqrt{cx}$. Et $2\sqrt{\frac{axx}{c}}$ diviſ. per $3\sqrt{cd}$ dat $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{axx}{ccd}}$; Div. autem per $3\sqrt{\frac{cd}{x}}$ dat $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{ax^3}{ccd}}$. Et $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{11}}$ diviſ. per $\frac{3}{4}\sqrt{\frac{5}{7}}$ dat $\frac{8}{9}\sqrt{\frac{49}{55}}$. Et ſic in aliis.

Quantitas ex pluribus terminis compoſita dividitur applicando ſingulos ejus terminos ad Diviſorem. Sic $aa+3ax-xx$ diviſum per a dat $a+3x-\frac{xx}{a}$. At ubi Diviſor etiam ex pluribus terminis conſtat, diviſio perinde ac in Numeris inſtitui debet. Sic ad dividendum $a^3+2aac-aab-3abc+bbc$ per $a-b$, Dic quoties a continetur in a^3, nempe primus terminus Diviſoris in primo Dividendi? Reſp. aa. Quare ſcribe aa in Quoto & ablato $a-b$ in aa ſive a^3-aab de Dividendo, reſtabit $2aac-3abc+bbc$ adhuc dividendum. Dic itaque rurſus quoties a continetur in $2aac$? Reſp. $2ac$. Quare ſcribe etiam $2ac$ in Quoto, & ablato $a-b$ in $2ac$ ſive $2aac-2abc$ de præfato Reſiduo, reſtabit etiamnum $-abc+bbc$. Quamobrem dic iterum quoties a continetur in $-abc$? Reſp. $-bc$. Et proinde ſcribe $-bc$ in Quoto, & ablato denuo $a-b$ in $-bc$ ſive $-abc+bbc$ de noviſſimo Reſiduo, reſtabit nihil. Quod indicat Diviſionem peractam eſſe, prodeunte Quoto $aa+2ac-bc$.

Ca-

Digitized by Google

Cæterum ut hujuſmodi operationes ad formam qua in Diviſione numerorum uſi ſumus debitè reducantur, *termini tum dividendæ quantitatis tum Diviſoris juxta dimenſiones literæ alicujus quæ ad hanc rem maximè idonea judicabitur, in ordine diſponendi ſunt*, ita nempe ut illi primum locum occupent in quibus litera iſta eſt plurimarum dimenſionum, iique ſecundum in quibus dimenſiones ejus ad maximas proximæ ſunt; Et ſic deinceps uſque ad terminos qui per literam iſtam non omnino multiplicantur, adeoque ultimum locum occupabunt. Sic in allato Exemplo ſi termini ordinentur juxta dimenſiones literæ a, formam operis exhibebit adjunctum

$$
\begin{array}{l}
a-b)\; a^3 \begin{smallmatrix}+2aac\\ -aab\end{smallmatrix} -3abc+bbc\;(aa+2ac-bc \\
\quad\;\; \underline{a^3 - aab} \\
\quad\;\; 0+2aac-3abc \\
\qquad\quad \underline{2aac-2abc} \\
\qquad\qquad 0-abc+bbc \\
\qquad\qquad \underline{\;\;-abc+bbc} \\
\qquad\qquad\quad\;\; 0 \quad\;\; 0
\end{array}
$$

Diagramma: Ubi videre eſt quod terminus a^3 ſive a trium dimenſionum occupat primum locum dividendæ quantitatis, termini que $\begin{smallmatrix}2aac\\ -aab\end{smallmatrix}$ in quibus a eſt duarum dimenſionum ſecundum occupat, & ſic præterea. Potuit etiam dividenda quantitas ſic ſcribi $a^3 \begin{smallmatrix}+2c\\ -b\end{smallmatrix} aa - 3bca + bbc$. Ubi termini ſecundum locum occupantes, uniuntur aggregando factores literæ juxta quam fit ordinatio. Et hoc modo ſi termini juxta dimenſiones literæ b diſponerentur, opus ſicut in proximo Diagrammate inſtitui deberet, cujus explicationem adnectere viſum eſt.

$$
\begin{array}{l}
-b+a)\; cbb \begin{smallmatrix}-3ac\\ -aa\end{smallmatrix} b \begin{smallmatrix}+a^3\\ +2aac\end{smallmatrix} \;(-cb \begin{smallmatrix}+2ac\\ +aa.\end{smallmatrix} \\
\qquad\quad \underline{cbb-acb} \\
\qquad\quad\; 0 \begin{smallmatrix}-2ac\\ -aa\end{smallmatrix} b \begin{smallmatrix}+a^3\\ +2aac\end{smallmatrix} \\
\qquad\qquad \underline{\begin{smallmatrix}-2ac\\ -aa\end{smallmatrix} b \begin{smallmatrix}+2aac\\ +a^3\end{smallmatrix}} \\
\qquad\qquad\qquad 0 \quad\;\; 0
\end{array}
$$

Dic quoties $-b$ continetur in cbb? Reſp. $-cb$. Quare ſcripto $-cb$ in Quoto, aufer $-b+a$ in $-cb$ ſeu $bbc-abc$ & reſtabit in ſecundo loco $\begin{matrix}-2ac\\-aa\end{matrix}b$. Reſiduo huic adnecte, ſi placet, quantitates in ultimo loco, nempe $\begin{matrix}a^3\\+2aac,\end{matrix}$ & dic iterum quoties $-b$ continetur in $\begin{matrix}-2ac\\-aa\end{matrix}b$? Reſp. $\begin{matrix}+2ac.\\+aa.\end{matrix}$ Quare his in Quoto ſcriptis, aufer $-b+a$ in $\begin{matrix}+2ac\\+aa\end{matrix}$ ſeu $\begin{matrix}-2ac\\-aa\end{matrix}b\begin{matrix}+2aac\\+a^3\end{matrix}$ & reſtabit nihil. Unde conſtat diviſionem peractam eſſe, prodeunte Quoto $-cb+2ac+aa$ ut ante.

Atque ita ſi dividere oportet $aay^4-aac^4+yyc^4+y^6-2y^4cc-a^6-2a^4cc-a^4yy$ per $yy-aa-cc$: Quantitates juxta literam y ad hunc modum ordino, $yy\begin{matrix}-aa\\-cc\end{matrix}\Big)\,y^6\begin{matrix}+aa\\-2cc\end{matrix}y^4\begin{matrix}-a^4\\+c^4\end{matrix}yy\begin{matrix}-a^6\\-2a^4cc.\\-aac^4\end{matrix}$

Dein Diviſionem ut in ſubjecto Diagrammate inſtituo. Adjiciuntur & alia exempla, de quibus inſuper obſervandum eſt quod ubi dimenſiones literæ ad quam ordinatio fit, non in eadem ubique progreſſione Arithmetica ſed per ſaltum alicubi procedunt, locis vacuis ſubſtituitur nota *

$$yy\begin{matrix}-aa\\-cc\end{matrix}\Big)\,y^6\begin{matrix}+aa\\-2cc\end{matrix}y^4\begin{matrix}-a^4\\+c^4\end{matrix}yy\begin{matrix}-a^6\\-2a^4cc\\-aac^4\end{matrix}\Big(\,y^4\begin{matrix}+2aa\\-cc\end{matrix}yy\begin{matrix}+a^4\\+aacc.\end{matrix}$$

$$\overline{}$$

$$y^6\begin{matrix}-aa\\-cc\end{matrix}y^4$$

$$\overline{}$$

$$0\begin{matrix}+2aa\\-cc\end{matrix}y^4$$

$$\begin{matrix}+2aa\\-cc\end{matrix}y^4\begin{matrix}-2a^4\\-aaccyy\\+c^4\end{matrix}$$

$$\overline{}$$

$$\begin{array}{lll} 0 & +a^4 & \\ & +aacc\,yy & \\ & & -a^6 \\ & +a^4 & \\ & +aacc\,yy & -2a^4cc \\ & & -aac^4 \\ \hline & 0 & 0 \end{array}$$

$$a+b)\ aa\ \ * -bb\ (a-b$$
$$\begin{array}{l} aa+ab \\ \hline 0-ab \\ \ \ -ab-bb \\ \hline \ \ \ 0\ \ \ 0 \end{array}$$

$$yy-2ay+aa)\ y^4\ \ * -3\tfrac{1}{2}aayy+3a^3y-\tfrac{1}{2}a^4\ (yy+2ay-\tfrac{1}{2}aa.$$
$$\begin{array}{l} y^4-2ay^3+\ \ aayy \\ \hline 0+2ay^3-4\tfrac{1}{2}aayy \\ \ \ +2ay^3-4\ aayy+2a^3y \\ \hline \ \ \ \ 0-\tfrac{1}{2}aayy+\ a^3y \\ \ \ \ \ \ \ -\tfrac{1}{2}aayy+\ a^3y-\tfrac{1}{2}a^4 \\ \hline \ \ \ \ \ \ \ \ 0\ \ \ 0\ \ \ 0 \end{array}$$

$$aa+ab\sqrt{2}+bb)\ a^4\ \ *\ \ *\ \ *\ +b^4\ (aa-ab\sqrt{2}+bb$$
$$\begin{array}{l} a^4+a^3b\sqrt{2}+aabb \\ \hline -a^3b\sqrt{2}-aabb \\ -a^3b\sqrt{2}-2aabb-ab^3\sqrt{2} \\ \hline \ \ \ \ +aabb+ab^3\sqrt{2} \\ \ \ \ \ +aabb+ab^3\sqrt{2}+b^4 \\ \hline \ \ \ \ \ \ 0\ \ \ 0\ \ \ 0 \end{array}$$

Aliqui Diviſionem incipiunt ab ultimis terminis, ſed eodem recidit ſi inverſo terminorum ordine incipiatur à prioribus. Sunt & aliæ methodi dividendi ſed facillimam & commodiſſimam noſſe ſufficit.

Digitized by Google

DE EXTRACTIONE RADICUM.

CUM numeri alicujus *radix quadratica* extrahi debet, *is in locis alternis, incipiendo ab unitate, punctis notandus eſt; Dein figura in Quoto ſeu Radice ſcribenda cujus quadratum figuræ vel figuris ante primum punctum aut æquale ſit aut proximè minus. Et ablato illo quadrato, cæteræ radicis figuræ ſigillatim invenientur dividendo reſiduum per duplum radicis eatenus extractæ, & ſingulis vicibus auferendo è reſiduo illo factum à figura noviſſimè prodeunte & decuplo prædicti Diviſoris figura illa aucti.*

Sic ad extrahendam radicem ex 99856, imprimis nota cum punctis ad hunc modum 9·98·56. Dein quære numerum cujus quadratum æquatur primæ figuræ 9, nempe 3; ſcribeque in Quoto. Et de 9 ablato quadrato 3 × 3 ſeu 9, reſtabit 0; cui adnecte figuras ante proximum punctum, nempe 98 pro ſequente opere. Tum neglecta ultima figura 8, dic quoties duplum 3 ſeu 6 continetur in priori 9? Reſp. 1. Quare ſcripto 1 in Quoto, aufer factum 1 × 61 ſeu 61 de 98 reſtabit 37, cui adnecte ultimas figuras 56, & fiet 3756 numerus in quo opus denuo inſtitui debet. Quare & hujus ultima figura 6 neglecta, dic quoties duplum 31 ſeu 62 continetur in 375 (id quod ex initialibus figuris 6 & 37 conjici poteſt animadvertendo quoties 6 continetur in 37?) Reſp. 6. Et ſcripto 6 in Quoto aufer factum 6 × 626 ſeu 3756, & reſtabit nihil. Unde conſtat opus peractum eſſe; prodeunte Radice 316.

9·98·56 (316
9
—
098
61
——
3756
3756
——
0

Atque ita ſi radicem ex 22178791 extrahere oportet, imprimis facta punctatione quære numerum cujus quadratum, (ſiquidem id nequeat æquari) ſit proxime minus figuris 22 antecedentibus primum punctum, & invenies eſſe 4. Nam 5 × 5 ſive 25 major eſt quam 22, & 4 × 4 ſive 16 minor. Quare 4 erit prima figura radicis. Et hac itaque in Quoto ſcripta, de 22 aufer quadratum 4 × 4 ſeu 16, reſi-

reſiduoque 6 adjunge deſuper proximas figuras 17, & habebitur 617, cujus diviſione per duplum 4 elicienda eſt ſecunda figura radicis. Nempe, neglecta ultima figura 7, dic quoties 8 continetur in 61? Reſp. 7. Quare ſcribe 7 in Quoto, & de 617 aufer factum 7 in 87 ſeu 609 & reſtabit 8, cui adjunge proximas duas figuras 87, & habebitur 887, cujus diviſione per duplum 47 ſeu 94 elicienda eſt tertia figura. Utpote dic quoties 94 continetur in 88? Reſp. 0. Quare ſcribe 0 in quoto, adjungeque ultimas duas figuras 91, & habebitur 88791 cujus diviſione per duplum 470 ſeu 940 elicienda eſt ultima figura. Nempe dic quoties 940 continetur in 8879? Reſp. 9. Quare ſcribe 9 in Quoto, & radicem habebis 4709.

22·17·87·91 (4709,43637 &c.
16
617
609
88791
84681
411000
376736
3426400
2825649
60075100
56513196
356190400
282566169
73624231

Cæterum cum factus 9 × 9409 ſeu 84681 ablatus de 88791 relinquat 4110, id indicio eſt numerum 4709 non eſſe radicem numeri 22178791 præciſe, ſed ea paulo minorem exiſtere. Et in hoc caſu aliiſque ſimilibus ſi veram radicem magis appropinquare placeat, proſequenda eſt operatio in decimalibus numeris, adnectendo ad reſiduum circulos duos in ſingulis operationibus. Sic reſiduum 4110 adnexis circulis, evadit 411000; cujus diviſione per duplum 4709 ſeu 9418 elicietur figura prima decimalis, nimirum 4. Dein ſcripto 4 in Quoto, aufer 4 × 94184 ſeu 376736 de 411000 & reſtabit 34264. Atque ita adnexis iterum duobus circulis, opus pro lubitu continuari poteſt, prodeunte tandem radice 4709,43637, *&c.*

Ubi vero radix ad medietatem aut ultra extracta eſt, cæteræ figuræ per diviſionem ſolam obtineri poſſunt. Ut in hoc exemplo, ſi radicem ad uſque novem figuras extrahere animus eſſet, poſtquam quinque priores 4709,4 extractæ ſunt, quatuor poſteriores 3637

elici poſſent dividendo reſiduum 34264 per duplum 4709,4.

Et ad hunc modum ſi radix ex 32976 ad uſque quinque figuras extrahi debet; poſtquam figuræ punctis notantur, ſcribe 1 in Quoto, utpote cujus quadratum 1 × 1 ſeu 1 maximum eſt quod in 3, figura primum punctum antecedente, continetur. Ac de 3 ablato quadrato illo 1, reſtabit 2. Dein huic 2 annexis proximis figuris 29. Quære quoties duplum 1 ſeu 2 continetur in 22, & invenies quidem pluſquam 10, ſed nunquam licet diviſorem vel decies ſumere, imo neque novies in hoc caſu quia factus 9 × 29 ſive 261 major eſt quam 229 unde deberet auferri. Quare pone tantum 8. Et perinde ſcripto 8 in Quoto, & ablato 8 × 28 ſive 224 reſtabit 5. Huic inſuper annexis figuris 76, quære quoties duplum 18 ſeu 36 continetur in 57, & invenies 1, adeoque ſcribe 1 in Quoto ac de 576 ablato 1 × 361 ſeu 361 reſtabit 215. Denique ad cæteras figuras eliciendas divide hunc 215 per duplum 181 ſeu 362 & exibunt figuræ 59, quibus etiam ſcriptis in Quoto, habebitur Radix 181,59.

```
3·29·76 (181,59
1
—
229
224
———
  576
  361
  ———
362) 215 (59
```

Eadem methodo radices etiam è decimalibus numeris extrahuntur. Sic ex 329,76 radix eſt 18,159. Et ex 3,2976 radix eſt 1,8159. Et ex 0,032976 radix eſt 0,18159. Et ſic præterea. Sed ex 3297,6 radix eſt 57,4247. Et ex 32,976 radix eſt 5,74247. Atque ita ex 9,9856 radix eſt 3,16. Sed ex 0,99856 radix eſt 0,999279, &c. Quemadmodum è ſubjectis Diagrammis conſtare poteſt.

```
32·97;6 (57,4247, &c.        0;99·85·6 (0,999279, &c.
25                            81
——                            ——
 797                          1885
 749                          1701
———                           ————
  4860                         18460
  4576                         17901
  ————                         —————
1148) 284 (247               1998) 559 (279
```

Ex-

Extractionem radicis cubicæ & aliarum omnium, regula generali comprehendam, praxi potiùs intellectu facili quàm expeditæ conſulens, ne moram in eo quod raró uſu veniet, diſcentibus inferam. *Nimirum* tertia *quæque figura incipiendo ab unitate, primò punctis notanda eſt ſi radix ſit* cubica, *aut unaquæque* quinta *ſi ſit* quadrato-cubica, *&c. Dein figura in Quoto ſcribenda eſt cujus maxima poteſtas (hoc eſt* cubica *ſi radix ſit* cubica, *aut* quadrato-cubica *ſi radix ſit* quadrato-cubica, *&c.) aut æquetur figuræ vel figuris ante primùm punctum, aut proximè minor ſit. Et ablata illa poteſtate, figura proxima elicietur dividendo reſiduum proxima numeri reſolvendi figura auctum, per poteſtatem Quoti pene-maximam ductam in indicem maximæ poteſtatis, hoc eſt, per* triplum Quadratum *Quoti ſi radix ſit* cubica, *aut per* quintuplum quadrato-quadratum *ſi radix ſit* quadrato-cubica, *&c. Rurſuſque à numero reſolvendo ablata maxima Quoti poteſtate, figura tertia invenietur dividendo reſiduum illud proxima numeri reſolvendi figura auctum per poteſtatem Quoti pene-maximam ductam in indicem maximæ poteſtatis.* Et ſic in infinitum.

Sic ad extrahendam radicem cubicam ex 13312053, numerus ille primò punctis ad hunc modum 13'312'053 notandus eſt. Deinde in Quoto ſcribenda eſt illa figura 2 cujus cubus 8, ſiquidem æquari nequeat, proximè minor ſit figuris 13 antecedentibus primum punctum. Et ablato illo cubo reſtabit 5, quod proxima numeri reſolvendi figura 3 auctum, & per triplum quadratum quoti 2 diviſum, quærendo nempe quoties 3×4 ſeu 12 continetur in 53, dat 4 pro ſecunda figura Quoti. Sed cùm Quoti 24 prodiret cubus 13824 major quàm qui auferri poſſet de figuris 13312 antecedentibus ſecundum punctum, ſcribi debet tantum 3 in Quoto. Tum Quotus 23 in charta aliqua ſeorſim per 23 multiplicatus dat quadratum 529, quod iterum per 23 multiplicatum dat cubum 12167; & hic de 13312 ablatus relinquit 1145; quod proxima reſolvendi numeri figura

13'312'053 (237
aufer cub. 8
12) reſtat 53 (4. aut 3.
aufer c. 12167
1587) reſtat 11450 (7.
aufer c. 13312053
reſtat 0

gura o auctum, & per triplum quadratum Quoti 23 diviſum, quærendo nempe quoties 3×529 ſeu 1587 continetur in 11450, dat 7 pro tertia figura Quoti. Tum Quotus 237 per 237 multiplicatus dat quadratum 56169 quod iterum per 237 multiplicatum dat cubum 13312053, & hic de reſolvendo numero ablatus relinquit nihil. Unde patet radicem quæſitam eſſe 237.

Atque ita ad extrahendam radicem quadrato-cubicam ex 364·30820, punctum ponitur ad quintam figuram, & figura 3, cujus quadrato-cubus 243 proximè minor eſt figuris 364 antecedentibus punctum iſtud, ſcribitur in Quoto. Dein quadrato-cubo 243 de 364 ablato, reſtat 121 quod proxima reſolvendi numeri figura 3 auctum & per quinquies quadrato-quadratum Quoti diviſum, quærendo nempe quoties 5×81 ſeu 405 continetur in 1213, dat 2 pro ſecunda figura. Quotus ille 32 in ſe ter ductus efficit quadrato-quadratum 1048576, & hoc iterum in 32 ductum efficit quadrato-cubum 33554432; qui à numero reſolvendo ablatus relinquit 2876388. Itaque 32 eſt integra pars radicis, ſed non juſta radix, & proinde ſi opus in decimalibus numeris proſequi animus eſt, reſiduum circulo auctum dividi debet per quinquies prædictum quadrato-quadratum Quoti, quærendo quoties 5×1048576 ſeu 5242880 continetur in 2876388,0, & prodibit tertia figura ſive prima decimalis 5. Atque ita auferendo quadrato-cubum Quoti 32,5 de numero reſolvendo ac dividendo reſiduum per quinquies quadrato-quadratum ejus, erui poteſt quarta figura. Et ſic in infinitum.

364·30820 (32,5
———
243
405) 1213 (2
———
33554432
5242880) 2876388,0 (5

Cum radix quadrato-quadratica extrahenda eſt, oportet bis extrahere radicem quadraticam, eo quod $\sqrt{4}$ *valeat* $\sqrt{2 \times 2}$. *Et cum radix cubo-cubica extrahenda eſt, oportet extrahere radicem cubicam & ejus radicis radicem quadraticam, eo quod* $\sqrt{6}$ *valeat* $\sqrt{2 \times 3}$: *Unde aliqui radices baſce non cubo-cubicas ſed quadrato-cubicas dixêre.* Et idem in aliis radicibus quarum indices non ſunt numeri primi obſervandum eſt.

E

E ſimplicibus quantitatibus Algebraicis extractio radicum ex ipſa Notatione patet. Quemadmodum quod $\sqrt{aa}$ ſit a, & quod $\sqrt{aacc}$ ſit ac, & quod $\sqrt{9aacc}$ ſit $3ac$, & quod $\sqrt{49a^4xx}$ ſit $7aax$. Atque ita quod $\sqrt{\frac{a^4}{cc}}$ ſeu $\frac{\sqrt{a^4}}{\sqrt{cc}}$ ſit $\frac{aa}{c}$, & quod $\sqrt{\frac{a^4bb}{cc}}$ ſit $\frac{aab}{c}$, & quod $\sqrt{\frac{9aazz}{25bb}}$ ſit $\frac{3az}{5b}$, & quod $\sqrt{\frac{4}{9}}$ ſit $\frac{2}{3}$. Et quod $\sqrt[3]{\frac{8b^6}{27a^3}}$ ſit $\frac{2bb}{3a}$. Et quod $\sqrt[4]{aabb}$ ſit $\sqrt{ab}$. Quin etiam quod $b\sqrt{aacc}$ ſeu b in $\sqrt{aacc}$ valeat b in ac ſive abc. Et quod $3c\sqrt{\frac{9aazz}{25bb}}$ valeat $3c \times \frac{3az}{5b}$ ſive $\frac{9acz}{5b}$. Et quod $\frac{a+3x}{c}\sqrt{\frac{4bbx^4}{81aa}}$ valeat $\frac{a+3x}{c} \times \frac{2bxx}{9a}$ ſive $\frac{2abxx+6bx^3}{9ac}$.

Hæc inquam patent ſiquidem propoſitas quantitates è radicibus in ſe ductis produci (ut aa ex a in a, $aacc$ ex ac in ac, $9aacc$ ex $3ac$ in $3ac$, &c.) prima fronte conſtare poteſt. Ubi vero quantitates pluribus terminis conſtant, opus perinde ac in numeris abſolvitur. Sic ad extrahendam radicem quadraticam ex $aa+2ab+bb$, imprimis radicem primi termini aa nempe a ſcribe in Quoto. Et ablato ejus quadrato $a \times a$ reſtabit $2ab+bb$ pro elicienda reliqua parte radicis. Dic itaque quoties duplum quoti ſeu $2a$ continetur in primo reſidui termino $2ab$? Reſp. b.

$$\begin{array}{l} aa+2ab+bb\,(a+b \\ aa \\ \overline{} \\ 0 \quad 2ab+bb \\ \overline{} \\ 0 \quad\;\; 0 \end{array}$$

Adeoque ſcribe b in Quoto, & ablato facto b in $\overline{2a+b}$ ſeu $2ab+bb$ reſtabit nihil. Quod indicat opus peractum eſſe, prodeunte radice $a+b$.

Et ſic ad extrahendam radicem ex $a^4+6a^3b+5aabb-12ab^3+4b^4$, imprimis pone in Quoto radicem primi termini a^4 nempe aa, & ablato ejus quadrato $aa \times aa$ ſeu a^4 reſtabit $6a^3b+5aabb-12ab^3+4b^4$ pro reliqua radice elicienda. Dic itaque quoties $2aa$

 con-

continetur in $6a^3b$? Reſp. $3ab$ Quare ſcribe $3ab$ in Quoto & ablato facto $3ab$ in $\overline{2aa+3ab}$ ſeu $6a^3b+9aabb$ reſtabit etiamnum $-4aabb-12ab^3+4b^4$ pro opere proſequendo. Adeoque

$$a^4+6a^3b+5aabb-12ab^3+4b^4\,(aa+3ab-2bb$$
$$a^4$$
$$\overline{}$$
$$0$$
$$6a^3b+9aabb$$
$$\overline{}$$
$$0-4aabb$$
$$-4aabb-12ab^3+4b^4$$
$$\overline{}$$
$$0 \quad 0 \quad 0$$

dic iterum quoties duplum Quoti, nempe $2aa+6ab$ continetur in $-4aabb-12ab^3$, ſive quod perinde eſt dic quoties duplum primi termini Quoti ſeu $2aa$ continetur in primo reſidui termino $-4aabb$? Reſp. $-2bb$. Et proinde ſcripto $-2bb$ in Quoto, & ablato facto $-2bb$ in $2aa+6ab-2bb$ ſeu $-4aabb-12ab^3+4b^4$, reſtabit nihil. Unde conſtat radicem eſſe $aa+3ab-2bb$.

Atque ita quantitatis $xx-ax+\frac{1}{4}aa$ radix eſt $x-\frac{1}{2}a$, & quantitatis y^4+4y^3-8y+4 radix $yy+2y-2$, & quantitatis $16a^4-24aaxx+9x^4+12bbxx-16aabb+4b^4$ radix $3xx-4aa+2bb$ ut è ſubjectis diagrammis conſtare poteſt.

$$xx-ax+\tfrac{1}{4}aa\,(x-\tfrac{1}{2}a.$$
$$xx$$
$$\overline{}$$
$$0$$
$$-ax+\tfrac{1}{4}aa$$
$$\overline{\phantom{-ax+\tfrac{1}{4}aa}}$$
$$0 \quad 0$$

$9x^4$

$$9x^4\begin{matrix}-24aa\\+12bb\end{matrix}xx\begin{matrix}+16a^4\\-16aabb\\+4b^4\end{matrix}\left(3xx\begin{matrix}-4aa\\+2bb\end{matrix}\right.$$

$$\frac{9x^4}{0}$$

$$\begin{matrix}-24aa\\+12bb\end{matrix}xx\begin{matrix}+16a^4\\-16aabb\\+4b^4\end{matrix}$$

$$0 \qquad 0$$

$$y^4+4y^3 \quad * -8y+4\,(yy+2y-2$$

$$\frac{y^4}{0}$$

$$\underline{4y^3+4yy}$$

$$0-4yy$$

$$\underline{-4yy-8y+4}$$

$$0 \quad 0 \quad 0$$

Si radicem cubicam ex $a^3+3aab+3abb+b^3$ oportet extrahere, operatio eſt hujuſmodi. Extrahe radicem cubicam primi termini a^3

$$a^3+3aab+3abb+b^3\,(a+b.$$

$$a^3$$

$$3aa)\ 0+3aab\,(b$$

$$a^3+3aab+3abb+b^3$$

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

nempe a, & pone in Quoto. Tum ablato ejus cubo a^3; dic quoties triplum quadratum ejus ſeu $3aa$ continetur in proximo reſidui termino $3aab$? & prodit b. Quare ſcribe etiam b in Quoto, & cubo Quoti $a+b$ ablato reſtabit nihil. Radix itaque eſt $a+b$.

Eodem modo radix cubica, ſi extrahatur ex $z^6+6z^5-40z^3+96z-64$, prodit $zz+2z-4$. Atque ita in altioribus radicibus.

Digitized by Google

DE REDUCTIONE FRACTIONUM ET RADICALIUM.

Præcedentibus operationibus inſervit reductio fractarum & radicalium quantitatum, idque vel ad minimos terminos vel ad eandem denominationem.

DE REDUCTIONE FRACTIONUM *ad minimos terminos.*

Fractiones ad minimos terminos reducuntur dividendo numeratores ac denominatores per maximum communem diviſorem. Sic fractio $\frac{aac}{bc}$ reducitur ad ſimpliciorem $\frac{aa}{b}$ dividendo utrumque aac & bc per c; & $\frac{203}{667}$ reducitur ad ſimpliciorem $\frac{7}{23}$ dividendo utrumque 203 & 667 per 29; & $\frac{203aac}{667bc}$ reducitur ad $\frac{7aa}{23b}$ dividendo per $29c$. Atque ita $\frac{6a^3-9acc}{6aa+3ac}$ evadit $\frac{2aa-3cc}{2a+c}$ dividendo per $3a$. Et $\frac{a^3-aab+abb-b^3}{aa-ab}$ evadit $\frac{aa+bb}{a}$ dividendo per $a-b$.

Et hac Methodo termini poſt Multiplicationem vel Diviſionem plerumque abbreviari poſſunt. Quemadmodum ſi multiplicare oportet $\frac{2ab^3}{3ccd}$ per $\frac{9acc}{bdd}$ vel id dividere per $\frac{bdd}{9acc}$ prodibit $\frac{18aab^3cc}{3bccd^3}$, & per reductionem $\frac{6aabb}{d^3}$. Sed in hujuſmodi caſibus præſtat ante operationem concinnare terminos, dividendo per maximum communem diviſorem quos poſtea dividere oporteret. Sic in allato exemplo ſi dividam $2ab^3$ & bdd per communem diviſorem b, & $3ccd$ ac $9acc$ per communem diviſorem $3cc$; emerget fractio $\frac{2abb}{d}$ multiplicanda per $\frac{3a}{dd}$ vel dividenda per $\frac{dd}{3a}$ prodeunte tandem $\frac{6aabb}{d^3}$ ut ſupra. Atque ita $\frac{aa}{c}$, in $\frac{c}{b}$

eva-

evadit $\frac{aa}{1}$ in $\frac{1}{b}$ ſeu $\frac{aa}{b}$. Et $\frac{aa}{c}$ diviſ. per $\frac{b}{c}$ evadit aa diviſ. per b ſeu $\frac{aa}{b}$. Et $\frac{a^3-axx}{xx}$ in $\frac{cx}{aa+ax}$ evadit $\frac{a-x}{x}$ in $\frac{c}{1}$ ſeu $\frac{ac}{x}-c$. Et 28 diviſ. per $\frac{7}{3}$ evadit 4 diviſ. per $\frac{1}{3}$, ſeu 12.

De inventione Diviſorum.

HUC ſpectat inventio diviſorum per quos quantitas aliqua dividi poſſit. *Si quantitas ſimplex eſt divide eam per minimum ejus diviſorem, & quotum per minimum diviſorem ejus, donec quotus reſtet indiviſibilis, & omnes quantitatis diviſores primos habebis. Dein horum diviſorum ſingulos binos, ternos, quaternos,* &c. *duc in ſe, & habebis etiam omnes diviſores compoſitos.* Ut ſi numeri 60 diviſores omnes deſiderentur, divide eum per 2, & quotum 30 per 2, & quotum 15 per 3 & reſtabit quotus indiviſibilis 5. Ergo diviſores primi ſunt 1,2,2,3,5: Ex binis compoſiti 4,6,10,15: Ex ternis 12,20,30, ex omnibus 60. Rurſus ſi quantitatis $21abb$ diviſores omnes deſiderentur, divide eam per 3, & quotum $7abb$ per 7, & quotum abb per a, & quotum bb per b, & reſtabit quotus primus b. Ergo diviſores primi ſunt $1,3,7,a,b,b$; ex binis compoſiti 21 $3a$, $3b$, $7a$, $7b$, ab, bb; ex ternis $21a$, $21b$, $3ab$, $3bb$, $7ab$, $7bb$, abb; ex quaternis $21ab$, $21bb$, $3abb$, $7abb$; ex quinis $21abb$. Eodem modo ipſius $2abb-6aac$ diviſores omnes ſunt $1,2,a,bb-3ac$, $2a$, $2bb-6ac$, $abb-3aac$, $2abb-6aac$.

Si quantitas poſtquam diviſa eſt per omnes ſimplices diviſores manet compoſita & ſuſpicio eſt eam compoſitum aliquem diviſorem habere, diſpone eam ſecundum dimenſiones literæ alicujus quæ in ea eſt, & pro litera illa ſubſtitue ſigillatim tres vel plures terminos hujus progreſſionis Arithmeticæ, $3, 2, 1, 0, -1, -2$, *ac terminos totidem reſultantes una cum omnibus eorum diviſoribus ſtatue è regione correſpondentium terminorum progreſſionis, poſitis diviſorum ſignis tam affirmativis quam negativis. Dein è regione etiam ſtatue progreſſiones arithmeticas quæ per*

omnium numerorum diviſores percurrunt pergentes à majoribus terminis ad minores eodem ordine quo termini progreſſionis $3, 2, 1, 0, -1, -2$ *pergunt, & quarum termini differunt vel unitate vel numero aliquo qui dividit altiſſimum terminum propoſitæ quantitatis. Siqua occurrit ejuſmodi progreſſio, iſte terminus ejus qui ſtat è regione termini* o *progreſſionis primæ, diviſus per differentiam terminorum, & cum ſigno ſuo annexus literæ præfatæ, componet quantitatem per quam diviſio tentanda eſt.*

Ut ſi quantitas ſit $x^3 - xx - 10x + 6$ pro x ſubſtituendo ſigillatim terminos progreſſionis $1, 0, -1$, oriεntur numeri $-4, 6, +14$ quos cum omnibus eorum diviſoribus colloco è regione terminorum progreſſionis $1, 0, -1$ hoc modo.

1	4	1.2.4.	+4.
0	6	1.2.3.6	+3.
−1	14	1.2.7.14	+2.

Dein quoniam altiſſimus terminus x^3 per nullum numerum præter unitatem diviſibilis eſt, quæro in diviſoribus progreſſionem cujus termini differunt unitate, & a ſuperioribus ad inferiora pergendo decreſcunt perinde ac termini progreſſionis lateralis $1, 0, -1$. Et hujuſmodi progreſſionem unicam tantum invenio nempe 4, 3, 2, cujus itaque terminum $+3$ ſeligo qui ſtat è regione termini o progreſſionis primæ $1, 0, -1$, tentoque diviſionem per $x+3$. Et res ſuccedit, prodeunte $xx - 4x + 2$.

Rurſus ſi quantitas ſit $6y^4 - y^3 - 21yy + 3y + 20$. pro y ſubſtituo ſigillatim $2, 1, 0, -1, -2$ & numeros reſultantes 30, 7, 20, 3, 34 cum omnibus eorum diviſoribus è regione colloco ut ſequitur. Et in diviſoribus hanc ſolam eſſe animadverto decreſcentem progreſſionem arithmeticam $+10, +7, +4, +1, -2$. Hujus terminorum differentia 3 dividit altiſſimum quantitatis terminum $6y^4$.

2	30	1.2.3.5.6.10.15.30	+10.
1	7	1.7	+7.
0	20	1.2.4.5.10.20	+4.
−1	3	1.3	+1.
−2	34	1.2.17.34	−2.

Quare terminum $+4$ qui ſtat è regione termini o, diviſum per differentiam terminorum 3 adjungo literæ y, tentoque diviſionem per $y+\frac{4}{3}$ vel quod perinde eſt per $3y+4$, & res ſuccedit prodeunte $2y^3 - 3yy - 3y + 5$.

Atque ita ſi quantitas ſit $24a^5 - 50a^4 + 49a^3 - 140aa + 64a + 30$; opera-

operatio erit ut ſequitur.

2	42	1.2.3.6.7.14.21.42.	+3.+3.+ 7.
1	23	1.23.	+1.−1.+ 1.
0	30	1,2.3.5.6.10 15.30.	−1.−5.− 5.
−1	297	1.3.9.11.27.33.99.297	−3.−9.−11.

Tres occurrunt hic progreſſiones quarum termini $-1.-5.-5$ diviſi per differentias terminorum 2, 4, 6, dant tres diviſores tentandos $a-\frac{1}{2}$, $a-\frac{5}{4}$ & $a-\frac{5}{6}$. Et diviſio per ultimum diviſorem $a-\frac{5}{6}$ ſeu $6a-5$ ſuccedit prodeunte $4a^4-5a^3+4aa-20a-6$.

Si nullus occurrit hac methodo diviſor, vel nullus qui dividit propoſitam quantitatem, concludendum erit quantitatem illam non admittere diviſorem unius dimenſionis. Poteſt tamen fortaſſe, ſi plurium ſit quam trium dimenſionum, diviſorem admittere duarum. Et ſi ita, diviſor ille inveſtigabitur hac methodo. *In quantitate illa pro litera ſubſtitue, ut ante, quatuor vel plures terminos progreſſionis hujus* 3, 2, 1, 0, −1, −2, −3. *Diviſores omnes numerorum reſultantium ſigillatim adde & ſubduc quadratis correſpondentium terminorum progreſſionis illius ductis in diviſorem aliquem numeralem altiſſimi termini quantitatis propoſitæ, & ſummas differentiaſque è regione progreſſionis colloca. Dein progreſſiones omnes collaterales nota quæ per iſtas ſummas differentiaſque percurrunt. Sit* $\mp C$ *terminus iſtiuſmodi progreſſionis qui ſtat è regione termini* 0 *progreſſionis primæ*, $\mp B$ *differentia quæ oritur ſubducendo* $\mp C$ *de termino proxime ſuperiori qui ſtat è regione termini* 1 *progreſſionis primæ*, A *prædictus termini altiſſimi diviſor numeralis*, & l *litera quæ in quantitate propoſita eſt*, & *erit* $All \pm Bl \pm C$ *diviſor tentandus.*

Ut ſi quantitas propoſita ſit $x^4-x^3-5xx+12x-6$, pro x ſcribo ſucceſſivè 3, 2, 1, 0, −1, −2, & prodeuntes numeros 39, 6, 1, −6, −21, −26, una cum eorum diviſoribus è regione diſpono, addoque & ſubduco diviſores terminis progreſſionis illius quadratis ductiſque in diviſorem numeralem termini x^4 qui unitas eſt, *viz* terminis 9, 4, 1, 0, 1, 4, & ſummas differentiaſque è latere pariter diſpono. Dein progreſſiones quæ in iiſdem obveniunt è latere etiam ſcribo, ut ſequitur. Harum progreſſionum terminos 2 & −3 qui ſtant è regio-

è regione termini 0 progreſſionis illius quæ in columna prima eſt, uſur-

3	39	1.3.13.39.	9	−30.−4.6.8.10.12.22.48.	−4. 6.
2	6	1.2. 3. 6.	4	−2.1.2.3.5. 6. 7.10.	−2. 3.
1	1	1.	1	0. 2.	0. 0.
0	6	1.2. 3. 6.	0	−6.−3.−2.−1.1.2.3.6.	2.−3.
−1	21	1.3. 7.21.	1	−20.−6.−2.0.2.4 8.22.	4 −6.
−2	26	1.2.13.26.	4	−22.−9.2.3.5.6.17.30.	6.−9.

po ſucceſſive pro $\mp C$, Differentias quæ oriuntur ſubducendo hos terminos de terminis ſuperioribus 0 & 0 nempe -2 & $+3$, uſurpo reſpectivè pro $\mp B$. Unitatem item pro A; & x pro l. Et ſic pro $All \pm Bl \pm C$ habeo diviſores duos tentandos $xx+2x-2$ & $xx-3x+3$, per quorum utrumque res ſuccedit.

Rurſus ſi proponatur quantitas $3y^5-6y^4+y^3-8yy-14y+14$, Operatio erit ut ſequitur. Primo rem tento addendo & ſubducendo diviſores quadratis terminorum progreſſionis 2, 1, 0, 1 uſurpato 1 pro A, ſed res non ſuccedit. Quare pro A uſurpo 3, alterum nempe

3	170		27		−7. 17
2	38	1.2 19.38.	12	−26.−7.10.11.13.14.31.50.	−7. 11
1	10	1.2. 5.10.	3	−7.−2. 1. 2. 4. 5. 8.13.	−7. 5
0	14	1.2. 7.14.	0	−14.−7.−2.−1. 1.2.7.14.	−7.−1
−1	10	1.2. 5.10.	3	−7.−2. 1. 2. 4. 5. 8.13.	−7.−7
−2	190		12		−7.−13

termini altiſſimi $3y^5$ diviſorem numeralem, & quadratis iſtis multiplicatis per 3 hoc eſt numeris 12, 3, 0, 3 addo ſubducoque diviſores; & progreſſiones in terminis reſultantibus haſce duas invenio $-7, -7, -7, -7$ & $11.5.-1, -7$. Expeditionis gratia neglexeram diviſores extimorum numerorum 170 & 190. Quare continuatis progreſſionibus ſumo proximos earum hinc inde terminos, *viz.* -7 & 17 ſuperius, & -7, & -13 inferius, ac tento ſi ſubductis his de numeris 27 ac 12 qui ſtant è regione in quarta columna differentiæ dividunt iſtos 170 & 190 qui ſtant è regione in columna ſecunda. Et quidem differentia inter 27 & -7 id eſt 34 dividit 170 & differentia 12 & -7 id eſt 19 dividit 190. Item differentia inter

27 & 17 id eſt 10 dividit 170 ſed differentia inter 12 & -13 id eſt 25 non dividit 190. Quare poſteriorem progreſſionem rejicio. Juxta priorem $\mp C$ eſt -7, & $\mp B$ nihil; terminis progreſſionis nullam habentibus differentiam. Quare diviſor tentandus $All \pm Bl \pm C$, erit $3yy+7$. Et diviſio ſuccedit, prodeunte $y^3-2yy-2y+2$.

Si nullus inveniri poteſt hoc pacto diviſor qui ſuccedit, concludendum eſt quantitatem propoſitam non admittere diviſorem duarum dimenſionum. Poſſet eadem methodus extendi ad inventionem diviſorum dimenſionum plurium, quærendo in prædictis ſummis differentiiſque progreſſiones non arithmeticas quidem ſed alias quaſdem quarum terminorum differentiæ primæ, ſecundæ, tertiæ, &c. ſunt in arithmetica progreſſione: At in his Tyro non eſt detinendus.

Ubi in quantitate propoſita duæ ſunt literæ, & omnes ejus termini ad dimenſiones æquè altas aſcendunt; pro una iſtarum literarum pone unitatem, dein per regulas præcedentes quære diviſorem, ac diviſoris hujus comple deficientes dimenſiones reſtituendo literam illam pro unitate.

Ut ſi quantitas ſit $6y^4-cy^3-21ccyy+3c^3y+20c^4$ ubi termini omnes ſunt quatuor dimenſionum; pro c pono 1, quantitas evadit $6y^4-y^3-21yy+3y+20$, cujus diviſor ut ſupra eſt $3y+4$, & completa deficiente dimenſione poſterioris termini per dimenſionem c, fit $3y+4c$ diviſor quæſitus. Ita ſi quantitas ſit $x^4-bx^3-5bbxx+12b^3x-6b^4$; poſito 1 pro b, & quantitatis reſultantis $x^4-x^3-5xx+12x-6$ invento diviſore $xx+2x-2$, compleo ejus deficientes dimenſiones per dimenſiones b, & ſic habeo diviſorem quæſitum $xx+2bx-2bb$.

Ubi in quantitate propoſita tres vel plures ſunt literæ, & ejus termini omnes ad eaſdem dimenſiones aſcendunt; poteſt diviſor per præcedentes regulas inveniri; ſed expeditius hoc modo: *Quære omnes diviſores terminorum omnium in quibus literarum aliqua non eſt, item terminorum omnium in quibus alia aliqua literarum non eſt, pariter & omnium in quibus tertia litera quartaque & quinta non eſt ſi tot ſunt literæ. Et ſic percurre omnes literas. Et è regione literarum colloca diviſores reſpectivè. Dein vide ſi in ſerie aliqua diviſorum per omnes literas pergente, partes omnes unicam tantum literam involventes*

tot vicibus reperiantur quot ſunt literæ una dempta in quantitate propoſita: Et partes duas literas involventes tot vicibus quot ſunt literæ demptis duabus in eadem quantitate. Si ita eſt; partes iſtæ omnes ſub ſignis ſuis ſemel ſumptæ erunt diviſor quæſitus.

Ut ſi proponatur quantitas $12x^3-14bxx+9cxx-12bbx-6bcx+8ccx+8b^3-12bbc-4bcc+6c^3$; terminorum $8b^3-12bbc-4bcc+6c^3$ in quibus non eſt x diviſores unius dimenſionis per præcedentes regulas inventi erunt $2b-3c$ & $4b-6c$; terminorum $12x^3+9cxx+8ccx+6c^3$ in quibus non eſt b, diviſor unicus $4x+3c$; ac terminorum $12x^3-14bxx-12bbx+8b^3$ in quibus non eſt c, diviſores $2x-b$ & $4x-2b$. Hos diviſores è regione literarum x, b, c diſpono ut hic vides.

x	$2b-3c.\ 4b-6c.$
b	$4x+3c.$
c	$2x-b.\ 4x-2b.$

Cum tres ſint literæ & diviſorum partes ſingulæ non niſi ſingulas literas involvant, in ſerie diviſorum debent partes illæ bis reperiri. At diviſorum $4b-6c$ & $2x-b$ partes $4b, 6c, 2x, b$ non niſi ſemel occurrunt. Extra diviſorem illum cujus ſunt partes non reperiuntur. Quare diviſores illos negligo. Reſtant tantum tres diviſores $2b-3c$, $4x+3c$ & $4x-2b$. Hi in ſerie ſunt per omnes literas x, b, c pergente, & eorum partes ſingulæ $2b, 3c, 4x$, bis reperiuntur in ipſis ut oportuit, idque cum ſignis iiſdem, ſi modò ſigna diviſoris $2b-3c$ mutentur, & ejus loco ſcribatur $-2b+3c$. Nam ſigna diviſoris cujuſvis mutare licet. Sumo itaque horum partes omnes $2b, 3c, 4x$ ſemel ſub ſignis ſuis, & aggregatum $-2b+3c+4x$ diviſor erit quem invenire oportuit. Nam ſi per hunc dividas quantitatem propoſitam prodibit $3xx-2bx+2cc-4bb$.

Rurſus ſi quantitas ſit $12x^5-10ax^4-9bx^4-26aax^3+12abx^3+6bbx^3+24a^3xx-8aabxx-8abbxx-24b^3xx-4a^3bx+6aabbx-12ab^3x+18b^4x+12a^4b+32aab^3-12b^5$; diviſores terminorum in quibus x non eſt colloco è regione x; illos terminorum in quibus a non eſt, è regione a; & illos terminorum quibus b non eſt, è regione b, ut hic vides. Dein illos omnes qui ſunt unius

x | $b, 2b, 4b, aa+3bb, 2aa+6bb, 4aa+12bb, bb-3aa, 2bb-6aa, 4bb-12aa.$

a | $4xx-3bx+2bb, 12xx-9bx+6bb.$

b | $x, 2x, 3x-4a, 6x-8a, 3xx-4ax, 6xx-8ax, 2xx+ax-3aa, 4xx+2ax-6aa.$

dimenſionis rejiciendos eſſe ſentio, quia ſimplices $b, 2b, 4b, x, 2x,$ & partes compoſitorum $3x-4a, 6x-8a,$ non niſi ſemel in omnibus diviſoribus reperiantur; tres autem ſunt literæ in quantitate propoſita, & partes illæ unicam tantum involvunt, atque adeo bis reperiri deberent. Similiter diviſores duarum dimenſionum $aa+3bb$, $2aa+6bb, 4aa+12bb, bb-3aa$ & $4bb-12aa$ rejicio, quia partes eorum $aa, 2aa, 4aa, bb$ & $4bb$ unicam tantum literam a vel b involventes non niſi ſemel reperiuntur. Diviſoris autem $2bb-6aa$, qui ſolus reſtat è regione x, partes $2bb$ & $6aa$ quæ ſimiliter unicam tantum literam involvunt, iterum reperiuntur, nempe pars $2bb$ in diviſore $4xx-3bx+2bb$ & pars $6aa$ in diviſore $4xx+2ax-6aa$. Quin etiam hi tres diviſores in ſerie ſunt, ſtantes è regione trium literarum x, a, b; & omnes eorum partes $2bb, 6aa, 4xx$ quæ unicam tantum literam involvunt bis reperiuntur in ipſis, idque ſub propriis ſignis; partes vero $3bx, 2ax$ quæ duas literas involvunt non niſi ſemel occurrunt in ipſis. Quare horum trium diviſorum partes omnes diverſæ $2bb, 6aa, 4xx, 3bx, 2ax$ ſub ſignis ſuis connexæ, diviſorem deſideratum $2bb-6aa+4xx-3bx+2ax$ conflabunt. Per hunc itaque divido quantitatem propoſitam & oritur $3x^3-4axx-2aab-6b^3$.

Si quantitatis alicujus termini omnes non ſunt æque alti, complendæ ſunt dimenſiones deficientes per dimenſiones literæ cujuſvis aſſumptæ, dein per præcedentes regulas invento diviſore, litera aſſumpta delenda eſt. Ut ſi quantitas ſit $12x^3-14bxx+9xx-12bbx-6bx+8x+8b^3-12bb-4b+6$; aſſume literam quamvis c, & per dimenſiones ejus comple dimenſiones quantitatis propoſitæ ad hunc modum $12x^3-14bxx+9cxx-12bbx-6bcx+8ccx+8b^3-12bbc-4bcc+6c^3$. Dein hujus diviſore $4x-2b+3c$,

 invento

invento dele c; & habebitur diviſor deſideratus $4x - 2b + 3$.

Aliquando diviſores facilius quam per has regulas inveniri poſſunt. Ut ſi litera aliqua in quantitate propoſita ſit unius tantum dimenſionis; quærendus erit maximus communis diviſor terminorum in quibus litera illa reperitur, & reliquorum terminorum in quibus non reperitur, nam diviſor ille totam dividet. Et ſi nullus eſt ejuſmodi communis diviſor, nullus erit diviſor totius. Exempli gratia, ſi proponatur quantitas $x^4 - 3ax^3 - 8aaxx + 18a^3x + cx^3 - acxx - 8aacx + 6a^3c - 8a^4$; quæratur communis diviſor terminorum $+cx^3 - acxx - 8aacx + 6a^3c$ in quibus c unius eſt tantum dimenſionis, & terminorum reliquorum $x^4 - 3ax^3 - 8aaxx + 18a^3x - 8a^4$ ac diviſor ille nempe $xx + 2ax - 2aa$ dividet totam quantitatem.

Cæterum maximus duorum numerorum diviſor communis, ſi prima fronte non innoteſcit, invenitur perpetua ablatione minoris de majori & reliqui de ablato. Nam quæſitus erit diviſor qui tandem nihil relinquit. Sic ad inveniendum maximum communem diviſorem numerorum 203 & 667, aufer ter 203 de 667, & reliquum 58 ter de 203, & reliquum 29 bis de 58, reſtabitque nihil: Quod indicat 29 eſſe diviſorem quæſitum.

Haud ſecus in ſpeciebus communis diviſor, ubi compoſitus eſt, invenitur ſubducendo alterutram quantitatem, aut multiplicem ejus de altera: Si modò & quantitates illæ & reſiduum juxta literæ alicujus dimenſiones ut Diviſione oſtenſum eſt, ordinentur, & qualibet vice continnentur dividendo ipſas per ſuos omnes diviſores qui aut ſimplices ſunt, aut ſingulos terminos inſtar ſimplicium dividunt. Sic ad inveniendum communem diviſorem Numeratoris ac Denominatoris fractionis hujus $\frac{x^4 - 3ax^3 - 8aaxx + 18a^3x - 8a^4}{x^3 - axx - 8aax + 6a^3}$, multiplica Denominatorem per x ut primus ejus terminus evadat idem cum primo termino numeratoris. Dein aufer, & reſtabit $-2ax^3 + 12a^3x - 8a^4$, quod concinnatum dividendo per $-2a$ evadit $x^3 - 6aax + 4a^3$. Hoc aufer de Denominatore & reſtabit $-axx - 2aax + 2a^3$. Quod itidem per $-a$ diviſum fit $xx + 2ax - 2aa$. Hoc autem per x mul-

multiplica, ut ejus primus terminus evadat idem cum primo termino noviſſimi ablati $x^3-6aax+4a^3$, de quo auferendum eſt; & reſtabit $-2axx-4aax+4a^3$, quod per $-2a$ diviſum fit etiam $xx+2ax-2aa$. Et hoc cum idem ſit ac ſuperius reſiduum, proindeque ablatum relinquat nihil, quæſitus erit diviſor per quem fractio propoſita, factâ Numeratoris ac Denominatoris diviſione, reduci poteſt ad ſimpliciorem, nempe ad $\frac{xx-5ax+4aa}{x-3a}$.

Atque ita ſi habeatur fractio $\frac{6a^5+15a^4b-4a^3cc-10aabcc}{9a^3b-27aabc-6abcc+18bc^3}$, termini ejus imprimis abbreviandi ſunt dividendo numeratorem per aa ac Denominatorem per $3b$. Dein ablato bis $3a^3-9aac-2acc+6c^3$ de $6a^3+15aab-4acc-10bcc$, reſtabit $\begin{matrix}15b\\+18c\end{matrix}aa\begin{matrix}-10bcc.\\-12c^3\end{matrix}$ Quod concinnatum dividendo terminum utrumque per $5b+6c$ perinde ac ſi $5b+6c$ ſimplex eſſet quantitas, evadit $3aa-2cc$. Hoc multiplicatum per a aufer de $3a^3-9aac-2acc+6c^3$ & ſecunda vice reſtabit $-9aac+6c^3$ quod itidem concinnatum per applicationem ad $-3c$, evadit etiam $3aa-2cc$ ut ante. Quare $3aa-2cc$ quæſitus eſt diviſor. Quo invento, divide per eum partes fractionis propoſitæ & obtinebitur $\frac{2a^3+5aab}{3ab-9bc}$.

Quod ſi diviſor communis hoc pacto non inveniatur, certum eſt nullum omninò exiſtere, niſi forſan è terminis prodeat per quos Numerator ac Denominator fractionis abbreviantur. Ut ſi habeatur fractio $\frac{aadd-ccdd-aacc+c^4}{4aad-4acd-2acc+2c^3}$, ac termini ejus juxta dimenſiones literæ d diſponantur ita ut Numerator evadat $\begin{matrix}aa\\-cc\end{matrix}dd\begin{matrix}-aacc\\+c^4\end{matrix}$ ac Denominator $\begin{matrix}4aa\\-4ac\end{matrix}d\begin{matrix}-2acc\\+2c^3\end{matrix}$. Hos imprimis oportet abbreviare dividendo utrumque Numeratoris terminum per $aa-cc$ & utrumque Denominatoris per $2a-2c$ perinde ac ſi $aa-cc$ & $2a-2c$ eſſent ſimplices quantitates. Atque ita vice Numeratoris emerget

$dd-cc$, & vice Denominatoris $2ad-cc$, ex quibus ſic præparatis nullis communis diviſor obtineri poteſt. Sed è terminis $aa-cc$ & $2a-2c$ per quos Numerator ac Denominator abbreviati ſunt, prodit ejuſmodi diviſor, nempe $a-c$, cujus ope fractio ad hanc $\frac{add+cdd-acc-c^3}{4ad-2cc}$ reduci poteſt. Quod ſi neque termini $aa-cc$ & $2a-2c$ communem diviſorem habuiſſent, fractio propoſita fuiſſet irreducibilis.

Et hæc generalis eſt methodus inveniendi communes diviſores: *Sed plerumque expeditius inveniuntur quærendo omnes alterutrius quantitatis diviſores primos, hoc eſt, qui per alios dividi nequeunt, ac dein tentando ſiqui alteram divident abſque reſiduo.* Sic ad reducendum $\frac{a^3-aab+abb-b^3}{aa-ab}$ ad minimos terminos, inveniendi ſunt diviſores quantitatis $aa-ab$ nempe a & $a-b$. Dein tentandum eſt an alterutr a vel $a-b$ dividet etiam $a^3-aab+abb-b$ abſque reſiduo.

DE REDUCTIONE FRACTIONUM
ad communem Denominatorem.

Fractiones ad communem Denominatorem reducuntur multiplicando terminos utriuſque per denominatorem alterius.

Sic habitis $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$, duc terminos unius $\frac{a}{b}$ in d, & viciſſim terminos alterius $\frac{c}{d}$ in b, & evadent $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$, quarum communis eſt denominator bd. Atque ita a & $\frac{ab}{c}$ ſive $\frac{a}{1}$ & $\frac{ab}{c}$ evadunt $\frac{ac}{c}$ & $\frac{ab}{c}$. Ubi verò Denominatores communem habent diviſorem, ſufficit multiplicare alternè per Quotientes. Sic fractiones $\frac{a^3}{bc}$ & $\frac{a^3}{bd}$ ad haſce $\frac{a^3d}{bcd}$ & $\frac{a^3c}{bcd}$ reducuntur, multiplicando alternè per Quo-

Digitized by Google

Quotientes c ac d ortos diviſione denominatorum per communem diviſorem b.

Hæc autem reductio præcipuè uſui eſt in Additione & Subductione fractionum, quæ ſi diverſos habent denominatores, ad eundem reducendæ ſunt antequam uniri poſſunt. Sic $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ per reductionem evadit $\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}$, ſive $\frac{ad+bc}{bd}$. Et $a+\frac{ab}{c}$ evadit $\frac{ac+ab}{c}$. Et $\frac{a^3}{bc}-\frac{a^3}{bd}$ evadit $\frac{a^3d-a^3c}{bcd}$ vel $\frac{d-c}{bcd}a^3$. Et $\frac{c^4+x^4}{cc-xx}-cc-xx$ evadit $\frac{2x^4}{cc-xx}$. Atque ita $\frac{2}{3}+\frac{5}{7}$ evadit $\frac{14}{21}+\frac{15}{21}$ ſive $\frac{14+15}{21}$ hoc eſt $\frac{29}{21}$. Et $\frac{11}{6}-\frac{3}{4}$ evadit $\frac{22}{12}-\frac{9}{12}$ ſive $\frac{13}{12}$. Et $\frac{3}{4}-\frac{5}{12}$ evadit $\frac{9}{12}-\frac{5}{12}$ ſive $\frac{4}{12}$ hoc eſt $\frac{1}{3}$. Et $3\frac{4}{7}$ ſive $\frac{3}{1}+\frac{4}{7}$ evadit $\frac{21}{7}+\frac{4}{7}$ ſive $\frac{25}{7}$. Et $25\frac{1}{2}$ evadit $\frac{51}{2}$.

Fractiones ubi plures ſunt gradatim uniri debent. Sic habito $\frac{aa}{x}-a+\frac{2xx}{3a}-\frac{ax}{a-x}$; ab $\frac{aa}{x}$ aufer a & reſtabit $\frac{aa-ax}{x}$, huic adde $\frac{2xx}{3a}$ & prodibit $\frac{3a^3-3aax+2x^3}{3ax}$ unde aufer denique $\frac{ax}{a-x}$ & reſtabit $\frac{3a^4-6a^3x+2ax^3-2x^4}{3aax-3axx}$. Atque ita ſi habeatur $3\frac{4}{7}-\frac{2}{3}$, imprimis aggregatum $3\frac{4}{7}$ inveniendum eſt nempe $\frac{25}{7}$ dein ab hoc auferendum $\frac{2}{3}$ & reſtabit $\frac{61}{21}$.

DE REDUCTIONE RADICALIUM *ad minimos terminos.*

Radicalis ubi totius radix extrahi nequit, plerumque continnatur extrahendo radicem diviſoris alicujus.

Sic $\sqrt{aabc}$ extrahendo radicem diviſoris aa fit $a\sqrt{bc}$. Et $\sqrt{48}$ extrahendo radicem diviſoris 16 fit $4\sqrt{3}$. Et $\sqrt{48aabc}$ extrahendo

do radicem diviſoris $16aa$ fit $4a\sqrt{3bc}$. Et $\sqrt{\frac{a^3b-4aabb+4ab^3}{cc}}$ extrahendo radicem diviſoris $\frac{aa-4ab+4bb}{cc}$ fit $\frac{a-2b}{c}\sqrt{ab}$. Et $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz}+\frac{4aam^3}{pzz}}$ extrahendo radicem diviſoris $\frac{aamm}{ppzz}$ fit $\frac{am}{pz}\sqrt{oo+4mp}$. Et $6\sqrt{\frac{75}{98}}$ extrahendo radicem diviſoris $\frac{25}{49}$ fit $\frac{30}{7}\sqrt{\frac{3}{2}}$, ſive $\frac{30}{7}\sqrt{\frac{6}{4}}$ radicemque denominatoris adhuc extrahendo, fit $\frac{15}{7}\sqrt{6}$. Et ſic $a\sqrt{\frac{b}{a}}$ ſive $a\sqrt{\frac{ab}{aa}}$ extrahendo radicem denominatoris fit $\sqrt{ab}$. Et $\sqrt{3:}\overline{8a^3b+16a^4}$ extrahendo radicem cubicam diviſoris $8a^3$ fit $2a\sqrt{3:}\overline{b+2a}$. Haud ſecus $\sqrt{4}a^3x$ extrahendo radicem quadraticam diviſoris aa fit $\sqrt{a}$ in $\sqrt{4}ax$ vel extrahendo radicem quadratoquadraticam diviſoris a^4 fit $a\sqrt{4}\frac{x}{a}$. Atque ita $\sqrt{6:}a^7x^5$ convertitur in $a\sqrt{6:}ax^5$, vel in $ax\sqrt{6:}\frac{a}{x}$ vel in $\sqrt{ax}\times\sqrt{3:}aax$.

Cæterùm hæc reductio non tantùm concinnandis radicalibus inſervit, ſed & earum Additioni & Subductioni, ſi modò ex parte radicali conveniant ubi ad formam ſimpliciſſimam reducuntur. Tunc enim uniri poſſunt, quod aliter non fit. Sic $\sqrt{48}+\sqrt{75}$ per reductionem evadit $4\sqrt{3}+5\sqrt{3}$ hoc eſt $9\sqrt{3}$. Et $\sqrt{48}-\sqrt{\frac{16}{27}}$ per reductionem evadit $4\sqrt{3}-\frac{4}{9}\sqrt{3}$ hoc eſt $\frac{32}{9}\sqrt{3}$. Et ſic $\sqrt{\frac{4ab^3}{cc}}+\sqrt{\frac{a^3b-4aabb+4ab^3}{cc}}$ extrahendo quicquid eſt rationale, evadit $\frac{2b}{c}\sqrt{ab}+\frac{a-2b}{c}\sqrt{ab}$ hoc eſt $\frac{a}{c}\sqrt{ab}$. Et $\sqrt{3:}\overline{8a^3b+16a^4}-\sqrt{3:}\overline{b^4+2ab^3}$ evadit $2a\sqrt{3:}\overline{b+2a}-b\sqrt{3:}\overline{b+2a}$ hoc eſt $\overline{2a-b}\sqrt{3:}\overline{b+2a}$.

DE

DE REDUCTIONE RADICALIUM
ad eandem denominationem.

Cum in radicalibus diverſæ denominationis inſtituenda eſt multiplicatio vel diviſio, oportet omnes ad eandem denominationem reducere, idque præfigendo ſignum radicale cujus index eſt minimus numerus quem earum indices dividunt abſque reſiduo, & ſuffixas quantitates toties dempta una vice in ſe ducendo quoties index ille jam major evaſerit.

Sic enim $\sqrt{ax}$ in $\sqrt{3:aax}$ evadit $\sqrt{6:a^3x^3}$ in $\sqrt{6:a^4xx}$ hoc eſt $\sqrt{6:a^7x^5}$. Et $\sqrt{a}$ in $\sqrt{4:ax}$ evadit $\sqrt{4:aa}$ in $\sqrt{4:ax}$ hoc eſt $\sqrt{4:a^3x}$. Et $\sqrt{6}$ in $\sqrt{4:\frac{5}{6}}$ evadit $\sqrt{4:36}$ in $\sqrt{4:\frac{5}{6}}$ hoc eſt $\sqrt{4:30}$. Eadem ratione $a\sqrt{bc}$ evadit $\sqrt{aa}$ in $\sqrt{bc}$ hoc eſt $\sqrt{aabc}$. Et $4a\sqrt{3bc}$ evadit $\sqrt{16aa}$ in $\sqrt{3bc}$ hoc eſt $\sqrt{48aabc}$. Et $2a\sqrt{3:\overline{b+2a}}$ evadit $\sqrt{3:8a^3}$ in $\sqrt{3:\overline{b+2a}}$ hoc eſt $\sqrt{3:\overline{8a^3b+16a^4}}$. Atque ita $\frac{\sqrt{ac}}{b}$ fit $\frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{bb}}$ ſive $\sqrt{\frac{ac}{bb}}$. Et $\frac{6abb}{\sqrt{18ab^3}}$ fit $\frac{\sqrt{36aab^4}}{\sqrt{18ab^3}}$ ſive $\sqrt{2ab}$. Et ſic in aliis.

DE REDUCTIONE RADICALIUM
ad ſimpliciores radicales per extractionem radicum.

Radices quantitatum quæ ex integris & radicalibus quadraticis componuntur ſic extrahe.

Deſignet A *quantitatis alicujus partem majorem*, B *partem minorem: Et erit* $\frac{A+\sqrt{AA-BB}}{2}$ *quadratum majoris partis radicis;* & $\frac{A-\sqrt{AA-BB}}{2}$ *quadratum partis minoris, quæ quidem majori adnectenda eſt cum ſigno ipſius* B.

Ut ſi quantitas ſit $3+\sqrt{8}$, ſcribendo 3 pro A, & $\sqrt{8}$ pro B,

erit $\sqrt{AA-BB}=1$, indeque quadratum majoris partis radicis $\frac{3+1}{2}$ id eſt 2, & quadratum minoris partis $\frac{3-1}{2}$ id eſt 1. Ergo radix eſt $1+\sqrt{2}$. Rurſus ſi ex $\sqrt{32}-\sqrt{24}$ radix extrahenda ſit, ponendo $\sqrt{32}$ pro A & $\sqrt{24}$ pro B erit $\sqrt{AA-BB}$ $\sqrt{8}$, & inde $\frac{\sqrt{32}+\sqrt{8}}{2}$ & $\frac{\sqrt{32}-\sqrt{8}}{2}$ hoc eſt $3\sqrt{2}$ & $\sqrt{2}$ quadrata partium radicis. Radix itaque eſt $\sqrt[4]{18}-\sqrt[4]{2}$. Eodem modo ſi de $aa+2x\sqrt{aa-xx}$ radix extrahi debet, pro A ſcribe aa, & pro B $2x\sqrt{aa-xx}$ & erit $AA-BB = a^4-4aaxx+4x^4$. Cujus radix eſt $aa-2xx$. Unde quadratum unius partis radicis erit $aa-xx$, illud alterius xx; adeoque radix $x+\sqrt{aa-xx}$. Rurſus ſi habeatur $aa+5ax-2a\sqrt{ax+4xx}$, ſcribendo $aa+5ax$ pro A & $2a\sqrt{ax+4xx}$ pro B, fiet $AA-BB=a^4+6a^3x+9aaxx$ cujus radix eſt $aa+3ax$. Unde quadratum majoris partis radicis erit $aa+4ax$, illud minoris ax, & radix $\sqrt{aa+4ax}-\sqrt{ax}$. Denique ſi habeatur $6+\sqrt{8}-\sqrt{12}-\sqrt{24}$, ponendo $6+\sqrt{8}=A$ & $-\sqrt{12}-\sqrt{24}$ B fiet $AA-BB=8$. Unde radicis pars major $\sqrt{3+\sqrt{8}}$ hoc eſt (ut ſupra) $1+\sqrt{2}$, & pars minor $\sqrt{3}$, atque adeo radix ipſa $1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$. Cæterum ubi plures ſunt hujuſmodi termini radicales, poſſunt partes radicis citius inveniri dividendo factum quarumvis duarum radicalium per tertiam aliquam radicalem quæ producit quotum rationalem & integrum. Nam dupli Quoti iſtius radix erit duplum partis radicis quæſitæ. Ut in exemplo noviſſimo $\frac{\sqrt{8}\times\sqrt{12}}{\sqrt{24}}=2$, $\frac{\sqrt{8}\times\sqrt{24}}{\sqrt{12}}=4$, $\frac{\sqrt{12}\times\sqrt{24}}{\sqrt{8}}=6$. Ergo partes radicis ſunt 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ut ſupra.

Eſt & regula extrahendi altiores radices ex quantitatibus numeralibus duarum potentia commenſurabilium partium.

Sit quantitas $A\pm B$. *Ejus pars major* A. *Index radicis extrahendæ* c. *Quære minimum numerum* n, *cujus poteſtas* n^c *dividitur per* $AA-BB$ *ſine reſiduo, & ſit quotus* Q. *Computa* $\sqrt[c]{\overline{A+B}\times\sqrt{Q}}$

in

in numeris integris proximis. Sit illud r. Divide A $\sqrt{Q}$ *per maximum diviſorem rationalem: Sit quotus s, ſitque* $\frac{r+\frac{n}{r}}{2s}$ *in numeris integris proximis t. Et erit* $\frac{ts\pm\sqrt{ttss-n}}{\sqrt[2c]{Q}}$ *radix quæſita, ſi modo radix extrahi poteſt.*

Ut ſi radix cubica extrahenda ſit ex $\sqrt{968}+25$; erit $AA-BB=343$; ejus diviſores 7, 7, 7; ergo $n=7$ & $Q=1$. Porro $\overline{A+B}\times\sqrt{Q}$ ſeu $\sqrt{968}+25$ extracta prioris partis radice ſit paulo major quam 56; ejus radix cubica in numeris proximis eſt 4. Ergo $r=4$. Inſuper A $\sqrt{Q}$ ſeu $\sqrt{968}$ extrahendo quicquid rationale eſt ſit $22\sqrt{2}$. Ergo $\sqrt{2}$ ejus pars radicalis eſt s, & $\frac{r+\frac{n}{r}}{2s}$ ſeu $\frac{5}{2\sqrt{2}}$ in numeris integris proximis eſt 2. Ergo $t=2$. Denique ts eſt $2\sqrt{2}$, $\sqrt{ttss-n}$ eſt 1 & $\sqrt[2c]{Q}$ ſeu $\sqrt[6]{1}$ eſt 1. Ergo $2\sqrt{2}+1$ eſt radix quæſita ſi modo radix extrahi queat. Tento itaque per multiplicationem ſi cubus ipſius $2\sqrt{2}+1$ ſit $\sqrt{968}+25$ & res ſuccedit.

Rurſus ſi radix cubica extrahenda ſit ex $68-\sqrt{4374}$; erit $AA-BB=250$, Cujus diviſores ſunt 5, 5, 5, 2. Ergo $n=5\times 2=10$, & $Q=4$. Et $\sqrt[6]{\overline{A+B}\times\sqrt{Q}}$ ſeu $\sqrt[3]{\overline{68+\sqrt{4374}}\times 2}$ in numeris proximis integris eſt $7=r$. Inſuper A $\sqrt{Q}$ ſeu $68\sqrt{4}$ extrahendo quicquid rationale eſt ſit $136\sqrt{1}$. Ergo $s=1$, & $\frac{r+\frac{n}{r}}{2s}$ ſeu $\frac{7+\frac{10}{7}}{2}$ in numeris integris proximis eſt $4=t$. Ergo $ts=4$, $\sqrt{ttss-n}=\sqrt{6}$ & $\sqrt[2c]{Q}=\sqrt[6]{4}$ ſeu $\sqrt[3]{2}$ atque adeo radix tentanda $\frac{4-\sqrt{6}}{\sqrt[3]{2}}$.

Iterum ſi radix quadrato-cubica extrahenda ſit ex $29\sqrt{6}+41\sqrt{3}$; erit

erit $AA - BB = 3$, adeoque $n = 3$, $Q = 81$, $r = 5$, $s = \sqrt{6}$, $t = 1$, $ts = \sqrt{6}$, $\sqrt{ttss - n} = \sqrt{3}$ & $\sqrt[2t]{Q} = \sqrt[10]{81}$ ſeu $\sqrt[5]{9}$ atque adeo radix tentanda $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{3}}{\sqrt[5]{9}}$.

Cæterum in hujuſmodi operationibus ſi quantitas fractio ſit vel partes ejus communem habent diviſorem; radices denominatoris & factorum ſeorſim extrahe. Ut ſi ex $\sqrt{242} - 12\frac{1}{2}$ radix cubica extrahenda ſit; hoc, reductis partibus ad communem denominatorem, fiet $\frac{\sqrt{968} - 25}{2}$. Dein extracta ſeorſim numeratoris ac denominatoris radice cubica orietur $\frac{2\sqrt{2} - 1}{\sqrt[3]{2}}$. Rurſus ſi ex $\sqrt[3]{3993} + \sqrt[6]{17578125}$ radix aliqua extrahenda ſit; divide partes per communem diviſorem $\sqrt[3]{3}$, & emerget $11 + \sqrt{125}$. Unde quantitas propoſita valet $\sqrt[3]{3}$ in $\overline{11 + \sqrt{125}}$, cujus radix invenietur extrahendo ſeorſim radicem factoris utriuſque $\sqrt[3]{3}$ & $11 + \sqrt{125}$.

DE FORMA ÆQUATIONIS.

Æquationes, quæ ſunt quantitatum aut ſibi mutuo æqualium, aut ſimul nihilo æquipollentium congeries, duobus præcipuè modis conſiderandæ veniunt; vel ut ultimæ concluſiones ad quas in Problematis ſolvendis deventum eſt, vel ut media quorum ope finales æquationes acquirendæ ſunt. Prioris generis æquatio ex unica tantum incognita quantitate cognitis involuta conflatur, modò Problema ſit definitum & aliquid certi quærendum innuat. Sed eæ poſterioris generis involvunt plures quantitates incognitas quæ ideo debent inter ſe comparari & ita connecti ut ex omnibus una tandem emergat æquatio nova cui inſit unica quam quærimus incognita quantitas admiſta cognitis. Quæ quantitas ut exinde facilius eliciatur, æquatio iſta variis plerumque modis transformanda eſt; donec evadat

dat ea ſimpliciſſima quæ poteſt, atque etiam ſimilis alicui ex ſequentibus earum gradibus, in quibus x deſignat quantitatem quæſitam ad cujus dimenſiones termini, ut vides, ordinantur, & p, q, r, s alias quaſcunque quantitates ex quibus determinatis & cognitis etiam x determinatur, & per methodos explicandas inveſtigari poteſt.

$x = p.$	$x - p = 0.$
$xx = px + q.$	Vel $xx - px - q = 0$
$x^3 = pxx + qx + r.$	$x^3 - pxx - qx - r = 0.$
$x^4 = px^3 + qxx + rx + s.$	$x^4 - px^3 - qxx - rx - s = 0.$
&c.	&c.

Ad horum normam itaque termini æquationum ſecundum dimenſiones incognitæ quantitatis in ordinem ſemper redigendi ſunt, ita ut primum locum occupent in quibus incognita quantitas eſt plurimarum dimenſionum, inſtar x, xx, x^3, x^4, & ſecundum locum in quibus ea eſt una dimenſione minor, inſtar p, px, pxx, px^3, & ſic præterea. Et quod ſigna terminorum attinet, poſſunt ea omnibus modis ſe habere: Imò & unus vel plures ex intermediis terminis aliquando deeſſe. Sic $x^3 * - bbx + b^3 = 0$ vel $x^3 = bbx - b^3$, eſt æquatio tertii gradus, $Z^4 \begin{smallmatrix} +a \\ -b \end{smallmatrix} Z^3 * \begin{smallmatrix} +ab^3 \\ -b^4 \end{smallmatrix} = 0$ æquatio quarti. Nam gradus æquationum æſtimantur ex maxima dimenſione quantitatis incognitæ, nullo reſpectu ad quantitates cognitas habito, nec ad intermedios terminos. Attamen ex defectu intermediorum terminorum æquatio plerumque fit multò ſimplicior, & nonnunquam ad gradum inferiorem quodammodo deprimitur. Sic enim $x^4 = qxx + s$ æquatio ſecundi gradus cenſenda eſt, ſiquidem ea in duas ſecundi gradus æquationes reſolvi poteſt. Nam ſuppoſito $xx = y$, & y pro xx in æquatione illa perinde ſcripto, ejus vice prodibit $yy = qy + s$, æquatio ſecundi gradus; cujus ope cum y inventa fuerit, æquatio $xx = y$ ſecundi etiam gradus, dabit x.

Atque hæ ſunt concluſiones ad quas Problemata deduci debent. Sed antequam eorum reſolutionem aggrediar, opus erit ut modos transformandi & in ordinem redigendi æquationes, & ex mediis eliciendi finales æquationes abſtracte doceam. Æquationis autem ſolitariæ reductionem in ſequentibus regulis complectar.

De concinnanda Æquatione ſolitaria.

Reg. I. *Siquæ ſunt quantitates quæ ſe mutuo deſtruere, vel per Additionem aut Subductionem coaleſcere poſſunt, termini perinde minuendi ſunt.*

Veluti ſi habeatur $5b - 3a + 2x = 5a + 3x$ aufer utrinque $2x$ & adde $3a$ proditque $5b = 8a + x$. Atque ita $\frac{2ab + bx}{a} - b = a + b$, delendo æquipollentes $\frac{2ab}{a} - b = b$, evadit $\frac{bx}{a} = a$.

Ad hanc Regulam referri debet etiam ordinatio terminorum æquationis quæ fieri ſolet per tranſlationem ad contrarias partes cum ſigno contrario. Ut ſi habita æquatione $5b = 8a + x$ deſideretur x; aufer utrinque $8a$, vel, quod eodem recidit, transfer $8a$ ad contrarias partes cum ſigno mutato, & prodibit $5b - 8a = x$. Eodem modo ſi habeatur $aa - 3ay = ab - bb + by$ ac deſideretur y, transpone $-3ay$ & $ab - bb$, eo ut ex una parte conſiſtant termini multiplicati per y, & ex altera reliqui termini, & prodibit $aa - ab + bb = 3ay + by$, unde y elicietur per Reg. 5. ſequentem, dividendo ſcilicet utramque partem per $3a + b$, prodibit enim $\frac{aa - ab + bb}{3a + b} = y$. Atque ita æquatio $abx + a^3 - aax = abb - 2abx - x^3$ per debitam tranſpoſitionem & ordinationem evadit $x^3 = \begin{smallmatrix} aa \\ -3ab \end{smallmatrix} x \begin{smallmatrix} -a^3 \\ +abb \end{smallmatrix}$ vel $x^3 \begin{smallmatrix} -aa \\ +3ab \end{smallmatrix} x \begin{smallmatrix} +a^3 \\ -abb \end{smallmatrix} = 0$.

Reg. II. *Siqua compareat quantitas per quam omnes æquationis termini multiplicantur, debent omnes per illam quantitatem dividi; vel ſi per eandem quantitatem omnes dividantur debent omnes per illam multiplicari.*

Sic habito $15bb = 24ab + 3bx$, divide terminos omnes per b & fit $15b = 24a + 3x$. Deinde per 3 & fit $5b = 8a + x$. Vel habito $\frac{b^3}{ac} - \frac{bbx}{cc} = \frac{xx}{c}$ multiplica omnes per c & prodit $\frac{b^3}{a} - \frac{bbx}{c} = xx$.

Reg.

Reg. III. *Siqua ſit fractio irreducibilis in cujus denominatore reperiatur litera illa ad cujus dimenſiones æquatio ordinanda eſt, omnes æquationis termini per iſtum denominatorem, aut per aliquem diviſorem ejus multiplicandi ſunt.*

Ut ſi æquatio $\frac{ax}{a-x}+b=x$ ſecundum x ordinanda ſit, multiplicentur omnes ejus termini per $a-x$ denominatorem fractionis $\frac{ax}{a-x}$ ſiquidem x inibi reperiatur, & prodit $ax+ab-bx=ax-xx$, ſeu $ab-bx=-xx$, & facta utriuſque partis tranſlatione $xx=bx-ab$. Atque ita ſi habeatur $\frac{a^3-abb}{2cy-cc}=y-c$ terminique juxta y ordinandi ſint multiplicentur per denominatorem $2cy-cc$ vel ſaltem per diviſorem $2y-c$ quo y tollatur è denominatore & exurget $\frac{a^3-abb}{c}=2yy-3cy+cc$ & ordinando $\frac{a^3-abb}{c}-cc+3cy=2yy$. Ad eundem modum $\frac{aa}{x}-a=x$ multiplicando per x evadit $aa-ax=xx$, & $\frac{aabb}{cxx}=\frac{xx}{a+b-x}$ multiplicando primo per xx, dein per $a+b-x$ evadit $\frac{a^3bb+aab^3-aabbx}{c}=x^4$.

Reg. IV. *Sicui ſurdæ quantitati irreducibili litera illa involvatur ad cujus dimenſiones æquatio ordinanda eſt, cæteri omnes termini ad contrarias partes cum ſignis mutatis transferendi ſunt, & utraque pars æquationis in ſe* ſemel *multiplicanda ſi radix* quadratica *ſit, vel* bis *ſi ſit* cubica, *&c.*

Sic ad ordinandum juxta x æquationem $\sqrt{aa-ax}+a=x$, transferatur a ad alteras partes, fitque $\sqrt{aa-ax}=x-a$; & quadratis partibus, $aa-ax=xx-2ax+aa$, ſeu $0=xx-ax$ hoc eſt $x=a$. Sic etiam $\sqrt[3]{:aax+2axx-x^3}-a+x=0$, tranſponendo $-a+x$ evadit $\sqrt[3]{:aax+2axx-x^3}=a-x$, & partibus cubicè multiplicatis $aax+2axx-x^3=a^3-3aax+3axx-x^3$, ſeu $xx=4ax-aa$. Et ſic $y=\sqrt{ay+yy-a\sqrt{ay-yy}}$ quadratis partibus evadit

dit $yy = ay + yy - a\sqrt{ay - yy}$ & terminis debitè transpoſitis $ay = a\sqrt{ay - yy}$ ſeu $y = \sqrt{ay - yy}$, & partibus iterum quadratis $yy = ay - yy$, & tranſponendo denuo, $2yy = ay$ ſive $2y = a$.

Reg. V. *Terminis ſecundum Dimenſiones literæ alicujus ope præcedentium regularum diſpoſitis, ſi maxima ejuſdem literæ dimenſio per cognitam quamlibet quantitatem multiplicetur, debet tota æquatio per eandem dividi.*

Sic $2y = a$ dividendo per 2 evadit $y = \frac{1}{2}a$. Et $\frac{bx}{a} = a$ dividendo per $\frac{b}{a}$ evadat $x = \frac{aa}{b}$. Et $\begin{matrix} 2ac \\ -cc \end{matrix} x^3 \begin{matrix} +a^3 \\ +aac \end{matrix} xx \begin{matrix} -2a^3c \\ +aacc \end{matrix} x - a^3cc = 0$ dividendo per $2ac - cc$ evadit $x^3 + \frac{\begin{matrix} a^3 \\ aac \end{matrix} xx \begin{matrix} -2a^3c \\ +aacc \end{matrix} x - a^3cc}{2ac - cc} = 0$, ſive $x^3 + \frac{a^3 + aac}{2ac - cc} xx - aax - \frac{a^3c}{2a - c} = 0$.

Reg. VI. *Aliquando reductio inſtitui poteſt dividendo æquationem per compoſitam aliquam quantitatem.*

Sic enim $y^3 = \begin{matrix} -2c \\ +b \end{matrix} yy + 3bcy - bbc$, ad hanc $yy = -2cy + bc$ reducitur transferendo terminos omnes ad eaſdem partes hoc modo, $y^3 \begin{matrix} +2c \\ -b \end{matrix} yy - 3bcy + bbc = 0$, & dividendo per $y - b$ ut in capite de diviſione oſtenſum eſt: Prodibit enim $yy + 2cy - bc = 0$. Aſt hujuſmodi diviſorum inventio difficilis eſt & eam prius docuimus.

Reg. VII. *Aliquando etiam reductio per extractionem radicis ex utraque æquationis parte inſtituitur.*

Quemadmodum ſi habeatur $xx = \frac{1}{4}aa - bb$, extracta utrobique radice prodit $x = \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$. Quod ſi habeatur $xx + aa = 2ax + bb$ transfer $2ax$ & exurget $xx - 2ax + aa = bb$, extractiſque partium radicibus $x - a = +\text{vel} - b$, ſeu $x = a \pm b$. Sic etiam habito $xx = ax - bb$, adde utrinque $-ax + \frac{1}{4}aa$ & prodit $xx - ax + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa - bb$,

Digitized by Google

$-bb$, & extracta utrobique radice $x-\frac{1}{2}a=\pm\sqrt{\frac{1}{4}aa-bb}$ ſeu $x=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\frac{1}{4}aa-bb}$.

Et ſic univerſaliter: Si ſit $xx=\cdot px\cdot q$, erit $x=\cdot\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}pp\cdot q}$. Ubi $\frac{1}{2}p$ & q iiſdem ſignis ac p & q in æquatione priori afficienda ſunt; ſed $\frac{1}{4}pp$ ſemper affirmativè ponendum. Eſtque hoc exemplum Regula ad cujus ſimilitudinem æquationes omnes quadraticæ ad formam ſimplicium reduci poſſunt. E. g Propoſita æquatione $yy=\frac{2xxy}{a}+xx$, ad extrahendam radicem y confer $\frac{2xx}{a}$ cum p, & xx cum q, hoc eſt ſcribe $\frac{xx}{a}$ pro $\frac{1}{2}p$ & $\frac{x^4}{aa}+xx$ pro $\frac{1}{4}pp\cdot q$, atque orietur $y=\frac{xx}{a}+\sqrt{\frac{x^4}{aa}+xx}$ vel $y=\frac{xx}{a}-\sqrt{\frac{x^4}{aa}+xx}$. Eodem modo æquatio $yy=ay-2cy+aa-cc$ conferendo $a-2c$ cum p, & $aa-cc$ cum q, dabit $y=\frac{1}{2}a-c+\sqrt{\frac{5}{4}aa-ac}$. Quin etiam æquatio quadrato-quadratica $x^4=-aaxx+ab^3$ cujus termini impares deſunt, ope hujus regulæ evadit $xx=-\frac{1}{2}aa+\sqrt{\frac{1}{4}a^4+ab^3}$, & extracta iterum radice $x=\sqrt{-\frac{1}{2}aa+\sqrt{\frac{1}{4}a^4+ab^3}}$. Et ſic in aliis.

Suntque hæ regulæ pro concinnanda æquatione ſolitaria, quarum uſum cum Analyſta ſatis perſpexerit, ita ut æquationem quamcunque propoſitam ſecundum quamlibet literarum in ea complexarum diſponere noverit, & ejuſdem literæ ſi ea unius ſit dimenſionis, aut maximæ poteſtatis ejus ſi plurium, valorem elicere: Haud difficilem ſentiet comparationem plurium æquationum inter ſe; quam pergo jam docere.

De duabus pluribuſve æquationibus in unam transformandis ut incognitæ quantitates exterminentur.

Cum in alicujus problematis ſolutionem plures habentur æquationes ſtatum quæſtionis comprehendentes, quarum unicuique plu-

res etiam incognitæ quantitates involvuntur; æquationes iſtæ (duæ per vices ſi modo ſint plures duabus) ſunt ita connectendæ ut una ex incognitis quantitatibus per ſingulas operationes tollatur, & emergat æquatio nova. Sic habitis æquationibus $2x = y+5$, & $x \quad y+2$, demendo æqualia ex æqualibus prodibit $x=3$. Et ſciendum eſt quod per quamlibet æquationem una quantitas incognita poteſt tolli, atque adeo cum tot ſunt æquationes quot quantitates incognitæ, omnes poſſunt ad unam denique reduci in qua unica manebit quantitas incognita. Sin quantitates incognitæ ſint unâ plures quàm æquationes habentur tum in æquatione ultimò reſultante duæ manebunt quantitates incognitæ, & ſi ſint duabus plures quàm æquationes habentur tum in æquatione ultimò reſultante manebunt tres, & ſic præterea.

Poſſunt etiam duæ vel plures quantitates incognitæ per duas tantum æquationes fortaſſe tolli. Ut ſi ſit $ax-by=ab-az$, & $bx+by=bb+az$: Tum æqualibus ad æqualia additis prodibit $ax+bx=ab+bb$, exterminatis utriſque y & z. Sed ejuſmodi caſus vel arguunt vitium aliquod in ſtatu quæſtionis latere, vel calculum erroneum eſſe aut non ſatis artificioſum. Modus autem quo una quantitas incognita per ſingulas æquationes tollatur ex ſequentibus patebit.

Exterminatio quantitatis incognitæ per æqualitatem valorum ejus.

Cum quantitas tollenda unius eſt tantum dimenſionis in utraque æquatione, valor ejus uterque per regulas jam ante traditas quærendus eſt, & alter valor ſtatuendus æqualis alteri.

Sic poſitis $a+x=b+y$ & $2x+y=3b$, ut exterminetur y æquatio prima dabit $a+x-b=y$, & ſecunda dabit $3b-2x=y$. Eſt ergo $a+x-b=3b-2x$, ſive ordinando $x=\frac{4b-a}{3}$.

Atque ita $2x=y$, & $5+x=y$ dant $2x=5+x$ ſeu $x=5$.

Et

Et $ax-2by=ab$, & $xy=bb$ dant $\frac{ax-ab}{2b}(=y)=\frac{bb}{x}$; ſive ordinando $xx-bx-\frac{2b^3}{a}=0$.

Item $\frac{bbx-aby}{a}=ab+xy$, & $bx+\frac{ayy}{c}=2aa$ tollendo x dant $\frac{aby+aab}{bb-ay}(=x)=\frac{2aac-ayy}{bc}$: Et reducendo $y^3-\frac{bb}{a}yy-\frac{2aac-bbc}{a}y+bbc=0$.

Denique $x+y-z=0$ & $ay=xz$ tollendo z dant $x+y(=z)=\frac{ay}{x}$ ſive $xx+xy=ay$.

Hoc idem quoque perficitur ſubducendo alterutrum valorem quantitatis incognitæ ab altero, & ponendo reſiduum æquale nihilo Sic in exemplorum primo tolle $3b-2x$ ab $a+x-b$ & manebit $a+3x-4b=0$, ſive $x=\frac{4b-a}{3}$.

Exterminatio quantitatis incognitæ ſubſtituendo pro ea valorem ſuum.

Cum in altera ſaltem æquatione, tollenda quantitas unius tantum dimenſionis exiſtit, valor ejus in ea quærendus eſt; & pro ſe in æquationem alteram ſubſtituendus. Sic propoſitis $xyy=b^3$ & $xx+yy=by-ax$; ut exterminetur x, prima dabit $\frac{b^3}{yy}=x$: Quare in ſecundam ſubſtituo $\frac{b^3}{yy}$ pro x, & prodit $\frac{b^6}{y^4}+yy=by-\frac{ab^3}{yy}$, ac reducendo $y^6-by^5+ab^3yy+b^6=0$.

Propoſitis autem $ayy+aay=z^3$; & $yz-ay=az$, ut y tollatur, ſecunda dabit $y=\frac{az}{z-a}$. Quare pro y ſubſtituo $\frac{az}{z-a}$ in

primam, proditque $\frac{a^3zz}{zz-2az+aa}+\frac{a^3z}{z-a}=z^3$. Et reducendo, $z^4-2az^3+aazz-2a^3z+a^4=0$.

Pari modo propoſitis $\frac{xy}{c}=z$ & $cy+zx=cc$, ad z tollendum pro eo ſubſtituo $\frac{xy}{c}$ in æquationem ſecundam, & prodit $cy+\frac{xxy}{c}=cc$.

Cæterum qui in hujuſmodi computationibus exercitatus fuerit ſæpenumero contractiores modos percipiet quibus incognita quantitas exterminari poſſit. Sic habitis $ax=\frac{bbx-b^3}{z}$ & $x=\frac{az}{x-b}$ ſi æqualia multiplicentur æqualibus, prodibunt æqualia $axx=abb$ ſive $x=b$. Sed caſus ejuſmodi particulares ſtudioſis proprio marte cum res tulerit inveſtigandos linquo.

Exterminatio quantitatis incognitæ quæ plurium in utraque æquatione dimenſionum exiſtit.

Cum in neutra æquatione tollenda quantitas unius tantum dimenſionis exiſtit valor maximæ poteſtatis ejus in utraque quærendus eſt; Deinde ſi poteſtates iſtæ non ſint eædem, æquatio poteſtatis minoris multiplicanda eſt per tollendam quantitatem aut per ejus quadratum aut cubum, &c. ut ea evadat ejuſdem poteſtatis cum æquatione altera. Tum valores illarum poteſtatum ponendæ ſunt æquales, & æquatio nova prodibit ubi maxima poteſtas ſive dimenſio tollendæ quantitatis diminuitur. Et hanc operationem iterando quantitas illa tandem auferetur.

Quemadmodum ſit $xx+5x=3yy$ & $2xy-3xx=4$; ut x tollatur, prima dabit $xx=-5x+3yy$ & ſecunda $xx=\frac{2xy-4}{3}$. Pono itaque $3yy-5x=\frac{2xy-4}{3}$, & ſic x ad unicam tantum dimenſionem reducitur, adeoque tolli poteſt per ea quæ paulo ante oſtendi.

di. Scilicet æquationem noviſſimam debite reducendo prodit $9yy - 15x = 2xy - 4$, ſive $x = \frac{9yy+4}{2y+15}$. Hunc itaque valorem pro x in aliquam ex æquationibus primo propoſitis (velut in $xx + 5x = 3yy$) ſubſtituo, & oritur $\frac{81y^4+72yy+16}{4yy+60y+225} + \frac{45yy+20}{2y+15} = 3yy$. Quam, ut in ordinem redigatur, multiplico per $4yy+60y+225$, & prodit $81y^4+72yy+16+90y^3+40y+675yy+300 = 12y^4+180y^3+675yy$, ſive $69y^4 - 90y^3 + 72yy + 40y + 316 = 0$.

Præterea ſi ſit $y^3 = xyy + 3x$, & $yy = xx - xy - 3$; ut y tollatur multiplico poſteriorem æquationem per y & fit $y^3 = xxy - xyy - 3y$ totidem dimenſionum quot prior. Jam ponendo valores ipſius y^3 ſibimet æquales habeo $xyy + 3x = xxy - xyy - 3y$, ubi y deprimitur ad duas dimenſiones. Per hanc itaque & ſimpliciorem ex æquationibus primo propoſitis $yy = xx - xy - 3$ quantitas y prorſus tolli poteſt inſiſtendo veſtigiis prioris exempli.

Sunt & alii modi quibus hæc eadem abſolvi poſſunt; idque ſæpenumero contractius. Quemadmodum ex $yy = \frac{2xxy}{a} + xx$ & $yy = 2xy + \frac{x^4}{aa}$; ut y deleatur, extrahe in utraque radicem y ſicut in Reg. 7. oſtenſum eſt, & prodibunt $y = \frac{xx}{a} + \sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx}$, & $y = x + \sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx}$. Jam hos ipſius y valores ponendo æquales habebitur $\frac{xx}{a} + \sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx} = x + \sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx}$, & rejiciendo æqualia $\sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx}$, reſtabit $\frac{xx}{a} = x$, vel $xx = ax$ & $x = a$.

Porro ut ex æquationibus $x + y + \frac{yy}{x} = 20$, & $xx + yy + \frac{y^4}{xx} = 140$ tollatur x, aufer y de partibus æquationis primæ, & reſtat $x + \frac{yy}{x} = 20 - y$, & partibus quadratis fit $xx + 2yy + \frac{y^4}{xx} = 400 - 40y + yy$

H 3 tollen-

tollendoque utrinque yy reſtat $xx+yy+\frac{y^4}{xx}=400-40y$. Quare cum $400-40y$ & 140 iiſdem quantitatibus æquentur, erit $400-40y=140$, ſive $y=6\frac{1}{2}$. Et ſic opus in pleriſque aliis æquationibus contrahere liceat.

Cæterum cum quantitas exterminanda multarum dimenſionum exiſtit, ad eam ex æquationibus tollendam calculus maxime laborioſus nonnunquam requiritur: Sed labor tunc plurimum minuetur per exempla ſequentia tanquam regulas adhibita.

Reg. I.

Ex $axx+bx+c=0$, & $fxx+gx+h=0$,

Exterminato x prodit

$$\overline{ah-bg-2cf}\times ah:+\overline{bh-cg}\times bf:+\overline{agg+cff}\times c=0.$$

Reg. II.

Ex $ax^3+bxx+cx+d=0$, & $fxx+gx+h=0$,

Exterminato x prodit

$$\overline{ah-bg-2cf}\times ahh:+\overline{bh-cg-2df}\times bfh:+\overline{ch-dg}\times\overline{agg+cff}:$$
$$+\overline{3agh+bgg+dff}\times df=0.$$

Reg. III.

Ex $ax^4+bx^3+cxx+dx+e=0$, & $fxx+gx+h=0$,

Exterminato x prodit

$$\overline{ah-bg-2cf}\times ah^3:+\overline{bh-cg-2df}\times bfhh:+\overline{agg+cff}$$
$$\times\overline{chh-dgh+egg-2efh}:+\overline{3agh+bgg+dff}\times dfh:$$
$$+\overline{2ahh+3bgh-dfg+eff}\times eff:-\overline{bg-2ah}$$
$$\times efgg=0.$$

Reg.

Reg. IV.

Ex $ax^3+bxx+cx+d=0$, & $fx^3+gxx+hx+k=0$,

Exterminato x prodit

$$\overline{ah-bg-2cf}\times\overline{adhh-achk}:+\overline{ak+bh-cg-2df}\times bdfh:$$
$$-\overline{ak+bh+2cg+3df}\times aakk:+\overline{cdh-ddg-cck+2bdk}$$
$$\times\overline{agg+cff}:+\overline{3agh+bgg+dff-3afk}\times ddf:-\overline{3ak-bh+cg+df}$$
$$\times bcfk:+\overline{bk-2dg}\times bbfk-\overline{bbk-3adh-cdf}\times agk=0.$$

Verbi gratia, ut ex æquationibus $xx+5x-3yy=0$, & $3xx-2xy+4=0$ exterminetur x: in regulam primam pro $a,b,c;f,g,$ & h reſpective ſubſtituo $1,5,-3yy;3,-2y,$& 4. Et ſignis + & − probe obſervatis oritur $\overline{4+10y+18yy}\times 4:+\overline{20-6y^3}\times 15:+\overline{4yy-27yy}\times -3yy=0$. Sive $16+40y+72yy+300-90y^3+69y^4=0$.

Simili ratione ut y deleatur ex æquationibus $y^3-xyy-3x=0$ & $yy+xy-xx+3=0$, in regulam ſecundam pro $a,b,c,d;f,g,h,$ & x ſubſtituo, $1,-x,0,-3x;1,x,-xx+3,$ & y, reſpective, proditque $\overline{3-xx+xx}\times\overline{9-6xx+x^4}:-\overline{3x+x^3+6x}\times\overline{-3x+x^3}:+3xx\times xx:+\overline{9x-3x^3-x^3-3x}\times -3x=0$. Tum delendo ſuperflua & multiplicando, fit $27-18xx+3x^4,-9xx+x^6,+3x^4-18x^4+12x^4=0$. Et ordinando $x^6+18x^4-45xx+27=0$.

Hactenus de unica incognita quantitate è duabus æquationibus tollenda. Quod ſi plures è pluribus tollendæ ſunt, opus per gradus peragetur: Ex æquationibus $ax=yz$, $x+y=z$ & $5x=y+3z$, ſi quantitas y elicienda ſit, imprimis tolle alteram quantitatum x aut z, puta x ſubſtituendo pro eâ valorem ejus $\frac{yz}{a}$ (per æquationem primam inventum) in æquationem ſecundam ac tertiam. Quo pacto obtinebuntur $\frac{yz}{a}+y=z$, & $\frac{5yz}{a}=y+3z$: E quibus deinde tolle z ut ſupra.

De

De modo tollendi quantitates quotcunque ſurdas ex æquationibus.

Huc referre licet quantitatum ſurdarum exterminationem fingendo eas literis quibuslibet æquales. Quemadmodum ſi ſit $\sqrt{ay} - \sqrt{aa-ay} = 2a + \sqrt{3:ayy}$, ſcribendo t, pro $\sqrt{ay}$, v pro $\sqrt{aa-ay}$, & x pro $\sqrt{3:ayy}$ habebuntur æquationes $t-v=2a+x$, $tt=ay$, $vv=aa-ay$, & $x^3=ayy$, ex quibus tollendo gradatim t, v, & x reſultabit tandem æquatio libera ab omni Aſymmetria.

Quomodo Quæſtio aliqua ad æquationem redigatur.

Poſtquam Tyro in æquationibus pro arbitrio transformandis & concinnandis aliquamdiu exercitatus fuerit, ordo exigit ut ingenii vires in quæſtionibus ad æquationem redigendis tentet. Propoſita autem aliqua Quæſtione, Artificis ingenium in eo præſertim requiritur ut omnes ejus conditiones totidem æquationibus deſignet. Ad quod faciendum perpendet imprimis an propoſitiones ſive ſententiæ quibus enunciatur ſint omnes aptæ quæ terminis algebraicis deſignari poſſint, haud ſecus quam conceptus noſtri characteribus græcis vel latinis. Et ſi ita, (ut ſolet in quæſtionibus quæ circa numeros vel abſtractas quantitates verſantur,) tunc nomina quantitatibus ignotis, atque etiam notis, ſi opus fuerit, imponat; & ſenſum quæſtionis ſermone, ut ita loquar, analytico deſignet. Et conditiones ejus ad algebraicos terminos ſic tranſlatæ tot dabunt æquationes, quot ei ſolvendæ ſufficiunt.

Quemadmodum ſi quærantur tres numeri continue proportionales quorum ſumma ſit 20, & quadratorum ſumma 140; poſitis x, y & z nominibus numerorum trium quæſitorum, Quæſtio è latinis literis in algebraicas vertetur ut ſequitur.

Quæ-

Quæſtio Latine enunciata.	Eadem algebraice.
Quæruntur tres numeri his conditionibus,	$x.y.z?$
Ut ſint continue proportionales,	$x.y::y.z.$ ſive $xz=yy$
Ut omnium ſumma ſit 20.	$x+y+z=20.$
Et ut quadratorum ſumma ſit 140.	$xx+yy+zz=140.$

Atque ita quæſtio deducitur ad æquationes $xz=yy$, $x+y+z=20$ & $xx+yy+zz=140$, quarum ope x, y & z per regulas ſupra traditas inveſtigandi ſunt.

Cæterum notandum eſt ſolutiones quæſtionum eo magis expeditas & artificioſas ut plurimum evadere quo pauciores incognitæ quantitates ſub initio ponuntur. Sic in hac quæſtione poſito x pro primo numero & y pro ſecundo, erit $\frac{yy}{x}$ tertius continue proportionalis; quem proinde ponens pro tertio numero quæſtionem ad æquationes ſic reduco.

Quæſtio Latine enunciata.	Eadem Algebraice.
Quæruntur tres numeri continue proportionales,	$x.y.\frac{yy}{x}?$
Quorum ſumma ſit 20,	$x+y+\frac{yy}{y}=20.$
Et quadratorum ſumma 140.	$xx+yy+\frac{y^4}{xx}=140.$

Habentur itaque æquationes $x+y+\frac{yy}{x}=20$ & $xx+yy+\frac{y^4}{xx}=140$ quarum reductione x & y determinandi ſunt.

Aliud exemplum accipe. Mercator quidam nummos ejus triente quotanis adauget, demptis 100 lb quas annuatim impendit in familiam, & poſt tres annos fit duplo ditior. Quæruntur nummi.

Ad hoc autem reſolvendum ſciendum eſt quod plures latent propoſitiones quæ omnes ſic eruuntur & enunciantur.

Latine.	Algebraice.
Mercator habet nummos quoſdam.	x.
Ex quibus anno primo expendit 100 ℔.	$x - 100$.
Et reliquum adauget triente.	$x - 100 + \frac{x - 100}{3}$ ſive $\frac{4x - 400}{3}$.
Annoque ſecundo expendit 100 ℔.	$\frac{4x - 400}{3} - 100$ ſive $\frac{4x - 700}{3}$.
Et reliquum adauget triente.	$\frac{4x - 700}{3} + \frac{4x - 700}{9}$ ſive $\frac{16x - 2800}{9}$.
Et ſic anno tertio expendit 100 ℔.	$\frac{16x - 2800}{9} - 100$ ſive $\frac{16x - 3700}{9}$.
Et reliquo trientem ſimiliter lucratus eſt.	$\frac{16x - 3700}{9} + \frac{16x - 3700}{27}$ ſive $\frac{64x - 14800}{27}$.
Fitque duplo ditior quam ſub initio.	$\frac{64x - 14800}{27} = 2x$.

Quæſtio itaque ad æquationem $\frac{64x - 14800}{27} = 2x$ redigitur, cujus reductione eruendus eſt x. Nempe duc eam in 27 & fit $64x - 14800 = 54x$ ſubduc $54x$ & reſtat $10x - 14800 = 0$, ſeu $10x = 14800$, & dividendo per 10 fit $x = 1480$. Quare 1480 ℔ ſunt nummi ſub initio ut & lucrum.

Vides itaque quod ad ſolutiones quæſtionum quæ circa numeros vel abſtractas quantitatum relationes ſolummodo verſantur, nihil aliud fere requiritur quam ut è ſermone Latino vel alio quovis in quo Problema proponitur, tranſlatio fiat in ſermonem (ſi ita loquar) Algebraicum, hoc eſt in Characteres qui apti ſunt ut noſtros de quantitatum relationibus conceptus deſignent. Nonnunquam vero poteſt accidere quod ſermo quocum ſtatus quæſtionis exprimitur ineptus videatur qui in Algebraicum poſſit verti; ſed paucis mutationibus adhibitis,

Digitized by Google

hibitis, & ad ſenſum potius quam verborum ſonos attendendo verſio reddetur facilis. Sic enim quælibet apud Gentes loquendi formæ propria habent Idiomata: Quæ ubi obvenerint, tranſlatio ex unis in alias non verbo tenus inſtituenda eſt ſed ex ſenſu determinanda. Cæterum ut hujuſmodi problemata hac methodo ad æquationes redigendi familiaritatem convincam & illuſtrem, & cum Artes exemplis facilius quam præceptis addiſcantur, placuit ſequentium problematum ſolutiones adjungere:

PROB. I.

Data duorum numerorum ſumma a & differentia quadratorum b, invenire numeros?

Sit eorum minor x & erit alter $a-x$ eorumque quadrata xx & $aa-2ax+xx$: Quorum differentia $aa-2ax$ ſupponitur b. Eſt itaque $aa-2ax=b$, indeque per reductionem $aa-b=2ax$ ſeu $\frac{aa-b}{2a}\left(=\frac{1}{2}a-\frac{b}{2a}\right)=x$.

Exempli Gr. Si ſumma numerorum ſeu a ſit 8, & quadratorum differentia ſeu b 16; erit $\frac{1}{2}a-\frac{b}{2a}(=4-1)=3=x$ & $a-x=5$. Quare numeri ſunt 3 & 5.

PROB. II.

Invenire tres quantitates x, y & z quarum paris cujuſque ſumma datur.

Si ſumma paris x & y ſit a; paris x & z, b; ac paris y & z, c: Pro determinandis tribus quæſitis x, y & z tres habebuntur æquationes $x+y=a$, $x+z=b$, & $y+z=c$. Jam ut incognitarum duæ puta y & z exterminentur, aufer x utrinque in prima & ſecunda æquatione, & emergent $y=a-x$, & $z=b-x$, quos valores pro y & z ſubſtitue in tertia, & orietur $a-x+b-x=c$ & per reductionem $x=\frac{a+b-c}{2}$. Invento x æquationes ſuperiores $y=a-x$ & $z=b-x$ dabunt y & z.

Digitized by Google

Exempl. Si ſumma paris x & y ſit 9, paris x & z 10, & paris y & z 13; tum in valoribus x, y & z ſcribe 9 pro a, 10 pro b, & 13 pro c; & evadet $a+b-c=6$, adeoque $x\left(=\frac{a+b-c}{2}\right)=3$, $y\ (=a-x)$ $=6$, & $z\ (=b-x)=7$.

PROB. III.

Quantitatem datam ita in partes quotcunque dividere ut majores partes ſuperent minimam per datas differentias.

Sit a quantitas in quatuor ejuſinodi partes dividenda, ejuſque prima atque minima pars x, & ſuper hanc exceſſus ſecundæ partis b, tertiæ partis c & quartæ partis d; & erit $x+b$ ſecunda pars, $x+c$ tertia pars & $x+d$ quarta pars, quarum omnium aggregatum $4x+b+c+d$ æquatur toti lineæ a. Aufer jam utrinque $b+c+d$ & reſtat $4x=a-b-c-d$ ſive $x=\frac{a-b-c-d}{4}$.

Exempl. Proponatur linea 20 pedum ſic in 4 partes diſtribuenda ut ſuper primam partem exceſſus ſecundæ ſit 2 pedum tertiæ 3 ped. & quartæ 7 ped. Et quatuor partes erunt $x\ \left(=\frac{a-b-c-d}{4}\right.$ ſive $\left.\frac{20-2-3-7}{4}\right)=2$, $x+b=4$, $x+c=5$, & $x+d=9$.

Eodem modo quantitas in plures partes iiſdem conditionibus dividitur.

PROB. IV.

Viro cuidam nummos inter mendicantes diſtribuere volenti, deſunt octo denarii quo minus det ſingulis tres denarios. Dat itaque ſingulis duos denarios & tres denarii ſuperſunt. Quæritur numerus mendicantium.

Eſto numerus mendicantium x & deerunt 8 denarii quo minus det omnibus $3x$ denarios; habet itaque $3x-8$ denarios. Ex his autem dat $2x$ denarios, & reliqui denarii $x-8$ ſunt tres. Hoc eſt $x-8=3$ ſeu $x=11$.

PROB.

PROB. V.

Si Tabellarii duo A & B, 59 milliaribus diſtantes, tempore matutino obviam eant, quorum A conficit 7 milliaria in 2 horis, & B 8 mill. in 3 horis, ac B una hora ſerius iter inſtituit quam A: Quæritur longitudo itineris quod A conficiet antequam conveniet B.

Dic longitudinem illam x; & erit $59-x$ longitudo itineris B: Et cum A pertranſeat 7 mill. in 2 hor. pertranſibit ſpatium x in $\frac{2x}{7}$ horis, eo quod ſit 7 mill. 2 hor. :: x mill. $\frac{2x}{7}$ hor. Atque ita cum B pertranſeat 8 mill. in 3 hor. pertranſibit ſpatium ſuum $59-x$ in $\frac{177-3x}{8}$ horis. Jam cum horum temporum differentia ſit 1 hora; ut evadant æqualia adde differentiam illam breviori tempori nempe tempori $\frac{177-3x}{8}$, & emerget $1+\frac{177-3x}{8}=\frac{2x}{7}$. Et per reductionem $35=x$. Nam multiplicando per 8 fit $185-3x=\frac{16x}{7}$. Dein multiplicando etiam per 7 fit $1295-21x=16x$, ſeu $1295=37x$. Et dividendo denique per 37, exoritur $35=x$. Sunt itaque 35 mill. iter quod A conficiet antequam conveniet B.

Idem generalius.

Datis duorum mobilium A & B eodem curſu pergentium celeritatibus, una cum intervallo locorum ac temporum à quibus incipiunt moveri: Determinare metam in qua convenient.

Pone mobilis A eam eſſe celeritatem qua ſpatium c pertranſire poſſit in tempore f, & mobilis B eam eſſe qua ſpatium d pertranſire poſſit in tempore g; & locorum intervallum eſſe e, ac h temporum in quibus moveri incipiunt.

Digitized by Google

CASUS I.

Deinde ſi ambo ad eaſdem plagas tendant, & A ſit mobile quod ſub initio motus longius diſtat a meta: Pone diſtantiam illam eſſe x, indeque aufer intervallum e, & reſtabit $x-e$ pro diſtantia B a meta. Et cum A pertranſeat ſpatium c in tempore f, tempus in quo pertranſibit ſpatium x erit $\frac{fx}{c}$, eo quod ſit ſpatium c ad tempus f, ut ſpatium x ad tempus $\frac{fx}{c}$. Atque ita cum B pertranſeat ſpatium d in g, tempus in quo pertranſibit ſpatium $x-e$ erit $\frac{gx-ge}{d}$. Jam cum horum temporum differentia ſupponatur h, ut ea evadant æqualia adde h breviori tempori, nempe tempori $\frac{fx}{c}$ ſi modo B prius incipiat moveri, & evadet $\frac{fx}{c}+h=\frac{gx-ge}{d}$. Et per reductionem $\frac{cge+cdh}{cg-df}$ vel $\frac{ge+dh}{g-\frac{d}{c}f}=x$. Sin A prius moveri incipiat adde h tempori $\frac{gx-ge}{d}$ & evadet $\frac{fx}{c}=h+\frac{gx-ge}{d}$, & per reductionem $\frac{cge-cdh}{cg-df}=x$.

CASUS II.

Quod ſi mobilia obviam eant, & x ut ante ponatur initialis diſtantia mobilis A a meta, tum $e-x$ erit initialis diſtantia ipſius B ab eadem meta; & $\frac{fx}{c}$ tempus in quo A conficiet diſtantiam x, atque $\frac{ge-gx}{d}$ tempus in quo B conficiet diſtantiam ſuam $e-x$. Quorum temporum minori, ut ſupra, adde differentiam h, nempe tempori $\frac{fx}{c}$ ſi B prius incipiat moveri, & ſic habebitur

tur $\frac{fx}{c}+h=\frac{ge-gx}{d}$, & per reductionem $\frac{cge-cdh}{cg+df}=x$. Sin A prius incipiat moveri, adde h tempori $\frac{ge-gx}{d}$ & evadet $\frac{fx}{c}=h+\frac{ge-gx}{d}$, & per reductionem $\frac{cge+cdh}{cg+df}=x$.

Exempl. I. Si quotidie Sol unum gradum conficit & Luna tredecim, & ad tempus aliquod, Sol ſit in principio Cancri atque poſt tres dies Luna in principio Arietis: Quæritur locus conjunctionis proxime futuræ. Reſp. in $10\frac{3}{4}$ gr. Cancri. Nam cum ambo ad eaſdem plagas eant, & ſerior ſit Epocha motus lunæ quæ longius diſtat a meta: Erit A Luna, B Sol, & $\frac{cge+cdh}{cg-df}$ longitudo itineris lunaris, quæ, ſi ſcribatur 13 pro c; 1 pro f, d, ac g; 90 pro e; & 3 pro h; evadet $\frac{13\times1\times90+13\times1\times3}{13\cdot1-1\times1}$; hoc eſt $\frac{1209}{12}$, ſive $100\frac{3}{4}$. Hos itaque gradus adjice pincipio Arietis & prodibit $10\frac{3}{4}$ gr. Cancri.

Exempl. II. Si Tabellarii duo A & B, 59 milliaribus diſtantes, tempore matutino obviam eant, quorum A conficit 7 milliaria in 2 horis, & B 8 milliaria in 3 horis, & B una hora ſerius iter inſtituit quam A: Quæritur iter quod A conficiet antequam conveniat B. Reſp. 35 mill. Nam cum obviam eant & A primo inſtituat iter, erit $\frac{cge+cdh}{cg+df}$ iter quæſitum. Et hoc, ſcribatur 7 pro c, 2 pro f, 8 pro d, 3 pro g, 59 pro e, & 1 pro h, evadet $\frac{7\times3\cdot59+7\times8\times1}{7\times3+8\times2}$; hoc eſt $\frac{1295}{37}$ ſive 35.

PROB. VI.

Data agentis alicujus poteſtate, invenire quot ejuſmodi agentes datum effectum a in dato tempore b producent.

Sit ea agentis poteſtas qua effectum c producere poteſt in tempore

pore d, & erit ut tempus d ad tempus b, ita effectus c quem agens iſte producere poteſt in tempore d, ad effectum quem poteſt producere in tempore b, qui proinde erit $\frac{bc}{d}$. Deinde ut unius agentis effectus $\frac{bc}{d}$ ad omnium effectum a, ita agens iſte unicus ad omnes agentes: Adeoque agentium numerus erit $\frac{ad}{bc}$.

Exempl. Si ſcriba in 8 diebus 15 folia deſcribere poteſt, quot ejuſmodi ſcribæ requiruntur ad deſcribendum 405 folia in 9 diebus? Reſp. 24. Nam ſi ſubſtituantur 8 pro d, 15 pro c, 405 pro a & 9 pro b, numerus $\frac{ad}{bc}$ evadet $\frac{405 \times 8}{9 \times 15}$ hoc eſt $\frac{3240}{135}$, ſive 24.

PROB. VII.

Datis plurium agentium viribus, tempus x determinare in quo datum effectum d conjunctim producent.

Agentium A, B, C, vires ponantur quæ in temporibus e, f, g producant effectus a, b, c reſpective; & hæ in tempore x producent effectus $\frac{ax}{e}, \frac{bx}{f}, \frac{cx}{g}$. Quare eſt $\frac{ax}{e}+\frac{bx}{f}+\frac{cx}{g}=d$, & per reductionem $x=\frac{d}{\frac{a}{e}+\frac{b}{f}+\frac{c}{g}}$.

Exempl. Tres mercenarii opus aliquod certis temporibus perficere poſſunt, *viz.* A ſemel in tribus ſeptimanis, B ter in octo ſeptimanis, & C quinquies in duodecim ſeptimanis. Quæritur quanto tempore ſimul abſolvent? Sunt itaque Agentium A, B, C vires quæ temporibus 3, 8, 12 producant effectus 1, 3, 5 reſpective: Et quæritur tempus quo abſolvent effectum 1. Quare pro $a, b, c; d; e, f, g$ ſcribe 1, 3, 5, 1, 3, 8, 12, & proveniet $x=\frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{3}{8}+\frac{5}{12}}$ ſive $\frac{8}{9}$ ſept. hoc eſt 6 dies $5\frac{1}{3}$ horæ, tempus quo ſimul abſolvent.

PROB.

PROB. VIII.

Diſſimiles duarum pluriumve rerum miſturas ita componere ut res illæ commiſtæ datam inter ſe rationem acquirant.

Sit unius miſturæ data quantitas $dA+eB+fC$, alterius eadem quantitas $gA+hB+kC$, & eadem tertiæ $lA+mB+nC$ ubi A,B, & C denotent res miſtas, & $d,e,f,g,h,$ &c. Proportiones earundem in miſturis. Et ſit $pA+qB+rC$ miſtura quam ex his tribus oportet componere; fingeque x,y & z numeros eſſe per quos ſi tres datæ miſturæ reſpectivè multiplicentur, earum ſumma evadet $pA+qB+rC$.

Eſt itaque $\left.\begin{matrix} dxA+exB+fxC \\ +gyA+hyB+kyC \\ +lzA+mzB+nzC \end{matrix}\right\} = pA+qB+rC$, Adeoque collatis terminis $dx+gy+lz=p,\ ex+hy+mz=q,$ & $fx+ky+nz=r$, & per reductionem $x=\frac{p-gy-lz}{d}=\frac{q-hy-mz}{e}=\frac{r-ky-nz}{f}$. Et rurſus æquationes $\frac{p-gy-lz}{d}=\frac{q-hy-mz}{e}$ & $\frac{q-hy-mz}{e}=\frac{r-ky-nz}{f}$ per reductionem dant $\frac{ep-dq+dmz-elz}{eg-dh}\ (=y)=\frac{fq-er+enz-fmz}{fh-ek}$: Quæ, ſi abbrevietur ſcribendo α pro $ep-dq$, β pro $dm-el$, γ pro $eg-eh$, δ pro $fq-er$, ζ pro $en-fm$, & θ pro $fh-ek$, evadet $\frac{\alpha+\beta z}{\gamma}=\frac{\delta+\zeta z}{\theta}$, & per reductionem $\frac{\theta\alpha-\gamma\delta}{\gamma\zeta-\beta\theta}=z$. Invento z pone $\frac{\alpha+\beta z}{\gamma}=y$ & $\frac{p-gy-lz}{d}=x$.

Exempl. Si tres ſint metallorum colliquefactorum miſturæ, quarum primæ pondo continet argenti ℥ 12, æris ℥ 1, & ſtanni ℥ 3, ſecundæ pondo continet argenti ℥ 1, æris ℥ 12, & ſtanni ℥ 3, & tertiæ pondo continet æris ℥ 14, ſtanni ℥ 2, & argenti nihil; ſintque hæ miſturæ ita componendæ ut pondo compoſitionis contineat argenti ℥ 4 æris ℥ 9 & ſtanni ℥ 3: Pro $d,e,f;g,h,k;l,m,n;p,q,r$ ſcribe 12,1,3;1,12,3;0,14,2;4,9,3 reſpectivè, & erit α ($=ep-dq=1\times4$

$-12 \times 9) = -104$, & β $(= dm - el = 12 \times 14 - 1 \times 0) = 168$, & ſic $\gamma = -143$, $\delta = 24$, $\zeta = -40$, & $\theta = 33$. Adeoque z $(= \frac{\theta\alpha - \gamma\delta}{\gamma\zeta - \beta\theta} = \frac{-3432 + 3432}{5720 - 5544}) = 0$, y $(= \frac{\alpha + 3z}{\gamma} = \frac{-104 + 0}{-143}) = \frac{8}{11}$, & x $(= \frac{p - gy - lz}{d} = \frac{4 - \frac{8}{11}}{12}) = \frac{3}{11}$. Quare ſi miſceantur $\frac{8}{11}$ partes pondo miſturæ ſecundæ, $\frac{3}{11}$ partes pondo primæ & nihil tertiæ aggregatum erit pondo continens quatuor uncias argenti, novem æris, & tres ſtanni.

PROB. IX.

Datis plurium ex iiſdem rebus miſturarum pretiis, & proportionibus miſtorum inter ſe, pretium cujuſvis è miſtis determinare.

Cujuſvis rerum A, B, C, miſturæ $dA + gB + lC$ pretium eſto p, miſturæ $eA + hB + mC$ pretium q, & miſturæ $fA + kB + nC$ pretium r; & rerum illarum A, B, C quærantur pretia x, y & z. Utpote pro rebus A, B, & C ſubſtitue earum pretia x, y & z, & exſurgent æquationes $dx + gy + lz = p$, $ex + hy + mz = q$, & $fx + ky + nz = r$, ex quibus pergendo ut in præcedente Problemate, elicientur itidem $\frac{\theta\alpha - \gamma\delta}{\gamma\zeta - \beta\theta} = z$, $\frac{\alpha + \beta z}{\gamma} = y$; & $\frac{p - gy - lz}{d} = x$.

Exempl. Emit quidam 40 modios tritici, 24 modios hordei, & 20 modios avenæ ſimul 15 libris 12 ſolidis: Deinde conſimilis grani emit 26 modios tritici, 30 modios hordei, & 50 modios avenæ ſimul 16 libris: Ac tertio conſimilis etiam grani emit 24 modios tritici, 120 modios hordei & 100 modios avenæ ſimul 34 lib. Quæritur quanti æſtimandus ſit modius cujuſque grani? Reſp. Modius tritici 5 ſolidis, hordei 3 ſolidis & avenæ 2 ſolidis. Nam pro d, g, l; e, h, m; f, k, n; p, q, & r ſcribendo reſpectivè 40, 24, 20; 26, 30, 50; 24, 120, 100; $15\frac{3}{5}$, 16, & 34; prodit α $(= ep - dq = 26 \times 15\frac{3}{5} - 40 \times 16) = -234\frac{2}{5}$; & β $(= dm - el = 40 \times 50 - 26 \times 20) = 1480$. Atque ita $\gamma = -576$, $\delta = -500$, $\zeta = 1400$, & $\theta = -2400$. Adeoque

$z\zeta =$

$z\left(=\frac{\theta\alpha-\gamma\delta}{\gamma\zeta-\beta\theta}=\frac{562560-288000}{-806400+3552000}=\frac{274560}{2745600}\right)=\frac{1}{10},\ y\left(=\frac{\alpha+\beta z}{\gamma}\right.$ $\left.=\frac{-234\frac{2}{5}+148}{-576}\right)=\frac{3}{20}$. Et $x\left(=\frac{p-gy-lz}{d}=\frac{15\frac{1}{3}-\frac{10}{3}-2}{40}\right)=\frac{1}{4}$. Conſtitit itaque modius tritici $\frac{1}{4}$ ℔ ſeu 5 ſolidis, modius hordei $\frac{3}{20}$ ℔ ſeu 3 ſolidis, & modius avenæ $\frac{1}{10}$ ℔ ſeu 2 ſolidis.

PROB. X.

Datis & miſturæ & miſtorum gravitatibus ſpecificis invenire proportionem miſtorum inter ſe.

Sit e gravitas ſpecifica miſturæ $A+B$ cujus A gravitas ſpecifica eſt a, & B gravitas b: & cum gravitas abſoluta ſeu pondus componatur ex mole corporis & gravitate ſpecifica, erit a A pondus ipſius A, b B pondus ipſius B, & $e\mathrm{A}+e\mathrm{B}$ pondus aggregati $A+B$, adeoque $a\mathrm{A}+b\mathrm{B}=e\mathrm{A}+e\mathrm{B}$, indeque $a\mathrm{A}-e\mathrm{A}=e\mathrm{B}-b\mathrm{B}$ ſeu $e-b.\ a-e::$ A. B.

Exempl. Sit auri gravitas ut 19, argenti ut $10\frac{1}{3}$, & Coronæ Hieronis ut 17; eritque 10. 3 ($::e-b.\ a-e::$ A. B): moles in auri corona, ad molem argenti, vel 190. 31 ($::19\times 10.\ 10\frac{1}{3}\times 3::$ $a\times\overline{e-b}.\ b\times\overline{a-e}$):: pondus auri in corona, ad pondus argenti, & 221. 31 :: pondus coronæ, ad pondus argenti.

PROB. XI.

Si boves a depaſcant pratum b in tempore c; & boves d depaſcant pratum æque bonum e in tempore f, & gramen uniformiter creſcat: Quæritur quot boves depaſcent pratum ſimile g in tempore h.

Si boves a in tempore c depaſcant pratum b; tum per analogiam boves $\frac{e}{b}a$ in eodem tempore c, vel boves $\frac{ec}{bf}a$ in tempore f, vel boves $\frac{ec}{bh}a$ in tempore h, depaſcent pratum e: puta ſi gramen poſt tempus c non creſceret. Sed cùm propter graminis incrementum boves d in tempore f, depaſcant ſolummodo pratum e, ideo gra-

minis in prato e incrementum illud per tempus $f-c$ tantum erit quantum per ſe ſufficit paſcendis bobus $d-\frac{eca}{bf}$ per tempus f, hoc eſt quantum ſufficit paſcendis bobus $\frac{df}{b}-\frac{eca}{bb}$ per tempus b. Et in tempore $b-c$ per analogiam tantum erit incrementum quantum per ſe ſufficit paſcendis bobus $\frac{b-c}{f-c}$ in $\frac{df}{b}-\frac{eca}{bb}$. ſive $\frac{bdfb-ecab-bdcf+aecc}{bfb-bcb}$. Hoc incrementum adjice bobus $\frac{aec}{bb}$ & prodibit $\frac{bdfb-ecab-bdcf+ecfa}{bfb-bcb}$ numerus boum quibus paſcendis ſufficit pratum e per tempus b. Adeoque per analogiam pratum g bobus $\frac{bdfgb-ecagb-bdcgf+ecfga}{befb-bceb}$ per idem tempus b paſcendis ſufficiet.

Exempl. Si 12 boves depaſcant $3\frac{1}{3}$ jugera prati in 4 ſeptimanis; & 21 boves depaſcant 10 jugera conſimilis prati in 9 ſeptimanis; quæritur quot boves depaſcant 24 jugera in 18 ſeptimanis? Reſp. 36. Iſte enim numerus invenietur ſubſtituendo in $\frac{bdfgb-ecagb-bdcgf+ecfga}{befb-bceb}$ numeros 12, $3\frac{1}{3}$, 4, 21, 10, 9, 24, & 18 pro literis a, b, c, d, e, f, g & b reſpective. Sed ſolutio forte haud minus expedita erit ſi è primis principiis ad formam ſolutionis præcedentis literalis eruatur. Utpote ſi 12 boves in 4 ſeptimanis depaſcant $3\frac{1}{3}$ jugera, tum per analogiam 36 boves in 4 ſeptimanis vel 16 boves in 9 ſeptimanis vel 8 boves in 18 ſeptimanis depaſcent 10 jugera: Puta ſi gramen non creſceret. Sed cum propter graminis incrementum 21 boves in 9 ſeptimanis depaſcant ſolummodo 10 jugera, illud graminis in 10 jugeris per poſteriores 5 ſeptimanas incrementum tantum erit quantum per ſe ſufficit exceſſui boum 21 ſupra 16, hoc eſt 5 bobus per 9 ſeptimanas, vel quod perinde eſt $\frac{5}{2}$ bobus per 18 ſeptimanas paſcendis. Et in 14 ſeptimanis (exceſſu 18 ſupra 4 primas) incrementum illud graminis per analogiam tantum erit

erit quantum ſufficiat 7 bobus per 18 ſeptimanas paſcendis; eſt enim 5 ſept. 14 ſept. ∷ boves 7 boves. Quare 8 bobus quos 10 jugera ſine incremento graminis paſcere poſſunt per 18 ſeptimanas adde hoſce 7 boves quibus paſcendis ſolum incrementum graminis ſufficit, & ſumma erit 15 boves. Ac denique ſi 10 jugera 15 bobus per 18 ſeptimanas paſcendis ſufficiant, tum per analogiam 24 jugera per idem tempus ſufficient 36 bobus.

PROB. XII.

Datis ſphæricorum corporum in eadem recta motorum, ſibique occurrentium magnitudinibus & motibus, determinare motus eorundem poſt reflexionem.

Hujus reſolutio ex his dependet conditionibus, ut corpus utrumque tantum reactione patiatur quantum agit in alterum, & ut eadem celeritate poſt reflexionem recedant ab invicem qua ante accedebant. His poſitis ſint corporum A & B celeritates a & b reſpective; & motus (ſiquidem componantur ex mole & celeritate corporum) erunt aA & bB. Et ſi corpora ad eaſdem plagas tendant, & A celerius movens inſequatur B, pone x decrementum motus aA, & incrementum motus bB percuſſione exortum; & poſt reflexionem motus erunt $aA-x$ & $bB+x$; & celeritates $\frac{aA-x}{A}$ ac $\frac{bB+x}{B}$ quarum differentia æquatur $a-b$ differentiæ celeritatum ante reflexionem. Habetur itaque æquatio $\frac{bB+x}{B}-\frac{aA-x}{A}=a-b$, & inde per reductionem fit $x=\frac{2aAB-2bAB}{A+B}$, quo pro x in celeritatibus $\frac{aA-x}{A}$ & $\frac{bB+x}{B}$ ſubſtituto prodeunt $\frac{aA-aB+2bB}{A+B}$ celeritas ipſius A, & $\frac{2aA-bA+bB}{A+B}$ celeritas ipſius B poſt reflexionem.

Quod ſi corpora obviam eant, tum ſigno ipſius b ubique mutato, celeritates poſt reflexionem erunt $\frac{aA-aB-2bB}{A+B}$

& $\frac{2aA+bA-bB}{A+B}$: Quarum alterutra ſi forte negativa obvenerit, id arguit motum illum poſt reflexionem ad plagam dirigi ei contrariam ad quam A tendebat ante reflexionem. Id quod etiam de motu ipſius A in caſu priori intelligendum eſt.

Exempl. Si corpora homogenea A trium librarum cum celeritatis gradibus 8, & B novem librarum cum celeritatis gradibus 2 ad eaſdem plagas tendant: tunc pro A, a, B & b ſcribe 3, 8, 9 & 2; & $\left(\frac{aA-aB+2bB}{A+B}\right)$ evadit -1, ac $\left(\frac{2aA-bA+bB}{A+B}\right)$ 5. Recedet itaque A cum uno gradu celeritatis poſt reflexionem, & B cum quinque gradibus progredietur.

PROB. XIII.

Invenire tres numeros continue proportionales quorum ſumma ſit 20, *& quadratorum ſumma* 140.

Pone numerorum primum x, & ſecundum y; eritque tertius $\frac{yy}{x}$, adeoque $x+y+\frac{yy}{x}=20$; & $xx+yy+\frac{y^4}{xx}=140$. Et per reductionem $xx\begin{smallmatrix}+y\\-20\end{smallmatrix}x+yy=0$, & $x^4\begin{smallmatrix}+yy\\-140\end{smallmatrix}xx+y^4=0$. Jam ut exterminetur x, pro a, b, c, d, e, f, g & h in Reg. 3. ſubſtitue reſpective $1, 0, yy-140, 0, y^4; 1, y-20, \& yy$; Et emerget $\overline{-yy+280}\times y^6 : \overline{+2yy-40y+260}\times\overline{260y^4-40y^5} : +3y^4\times y^4 : -2yy\times\overline{y^6-40y^5+400y^4} := 0$. Et per multiplicationem $1600y^6-20800y^5-67600y^4=0$. Ac reducendo $4yy-52y+169=0$. Sive (radice extracta) $2y-13=0$ ſeu $y=6\frac{1}{2}$, Id quod etiam brevius alia methodo ſed minus obvia ſupra inventum eſt. Porro ut inveniatur x ſubſtitue $6\frac{1}{2}$ pro y in æquatione $xx\begin{smallmatrix}+y\\-20\end{smallmatrix}x+yy=0$. Et exſurget $xx-13\frac{1}{2}x+42\frac{1}{4}=0$, ſeu $xx=13\frac{1}{2}x+42\frac{1}{4}$. Et extracta radice $x=6\frac{3}{4}+$ vel $-\sqrt{3\frac{5}{16}}$. Nempe $6\frac{3}{4}+\sqrt{3\frac{5}{16}}$ eſt maximus quæſitorum trium numerorum, & $6\frac{3}{4}-\sqrt{3\frac{5}{16}}$ minimus. Nam x alterutrum extremorum numerorum ambigue deſignat, indeque gemini prodeunt valores, quorum alteruter poteſt eſſe

eſſe x, exiſtente altero $\frac{yy}{x}$.

Idem aliter. Poſitis numeris x, y & $\frac{yy}{x}$ ut ante, erit $x+y+\frac{yy}{x}=20$, ſeu $xx=\frac{20}{-y}x-yy$ & extracta radice $x=10-\frac{1}{2}y+\sqrt{100-10y-\frac{3}{4}yy}$ primus numerus: Hunc & y aufer de 20 & reſtat $\frac{yy}{x}=10-\frac{1}{2}y-\sqrt{100-10y-\frac{3}{4}yy}$ tertius numerus. Eſtque ſumma quadratorum à tribus hiſce numeris $400-40y$, adeoque $400-40y=140$, ſive $y=6\frac{1}{2}$. Invento medio numero $6\frac{1}{2}$, ſubſtitue eum pro y in primo ac tertio numero ſupra invento; & evadet primus $6\frac{3}{4}+\sqrt{3\frac{5}{16}}$ ac tertius $6\frac{3}{4}-\sqrt{3\frac{5}{16}}$ ut ante.

PROB. XIV.

Invenire quatuor numeros continue proportionales quorum duo medii ſimul conſtituant 12, & duo extremi 20.

Sit x ſecundus numerus; & erit $12-x$ tertius; $\frac{xx}{12-x}$ primus; & $\frac{144-24x+xx}{x}$ quartus; adeoque $\frac{xx}{12-x}+\frac{144-24x+xx}{x}=20$. Et per reductionem $xx=12x-30\frac{2}{3}$ ſeu $x=6+\sqrt{5\frac{1}{3}}$. Quo invento cæteri numeri è ſuperioribus dantur.

PROB. XV.

Invenire quatuor numeros continue proportionales, quorum datur ſumma a, & ſumma quadratorum b.

Etſi deſideratas quantitates ut plurimum immediate quærere ſolemus, ſiquando tamen duæ obvenerint ambiguæ, hoc eſt quæ conditionibus omnino ſimilibus præditæ ſunt, (ut hic duo medii & duo extremi numerorum quatuor proportionalium) præſtat alias quantitates non ambiguas quærere per quas hæ determinantur, quemadmodum

dum harum ſummam vel differentiam vel rectangulum. Ponamus ergo ſummam duorum mediorum numerorum eſſe s, & rectangulum r; & erit ſumma extremorum $a-s$, & rectangulum etiam r propter proportionalitatem. Jam ut ex his eruantur quatuor illi numeri, pone x primum & y ſecundum; eritque $s-y$ tertius; & $a-s-x$ quartus; & rectangulum ſub mediis $sy-yy=r$, indeque medii $y=\frac{1}{2}s+\sqrt{\frac{1}{4}ss-r}$ & $s-y=\frac{1}{2}s-\sqrt{\frac{1}{4}ss-r}$: Item rectangulum ſub extremis $ax-sx-xx=r$, indeque extremi $x=\frac{a-s}{2}+\sqrt{\frac{ss-2as+aa}{4}-r}$, & $a-s-x=\frac{a-s}{2}-\sqrt{\frac{ss-2as+aa}{4}-r}$.

Summa quadratorum ex hiſce quatuor numeris eſt $2ss-2as+aa-4r$ quæ eſt $=b$. Ergo $r=\frac{1}{2}ss-\frac{1}{2}as+\frac{1}{4}aa-\frac{1}{4}b$, quo ſubſtituto pro r prodeunt quatuor numeri ut ſequitur.

$$\text{Duo medii}\begin{cases}\frac{1}{2}s+\sqrt{\frac{1}{4}b-\frac{1}{4}ss+\frac{1}{2}as-\frac{1}{4}aa}.\\ \frac{1}{2}s-\sqrt{\frac{1}{4}b-\frac{1}{4}ss+\frac{1}{2}as-\frac{1}{4}aa}.\end{cases}$$

$$\text{Duo extremi}\begin{cases}\frac{a-s}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}b-\frac{1}{4}ss}.\\ \frac{a-s}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}b-\frac{1}{4}ss}.\end{cases}$$

Reſtat tamen etiamnum inquirendus valor ipſius s. Quare ad abbreviandos terminos pro numeris hiſce ſubſtitue.

$$\frac{1}{2}s+p. \qquad \frac{a-s}{2}+q.$$

&

$$\frac{1}{2}s-p. \qquad \frac{a-s}{2}-q.$$

Et pone rectangulum ſub ſecundo & quarto æquale quadrato tertii ſiquidem hæc problematis conditio nondum impleatur, eritque

$as-ss$

$\frac{as-ss}{4} - \frac{1}{2}qs + \frac{pa-ps}{2} - pq = \frac{1}{4}ss - ps + pp$. Pone etiam rectangulum ſub primo & tertio æquale quadrato ſecundi, & erit $\frac{as-ss}{4} + \frac{1}{2}qs \frac{-pa+ps}{2} - pq = \frac{1}{4}ss + ps + pp$. Harum æquationum priorem aufer è poſteriori & reſtabit $qs - pa + ps = 2ps$, ſeu $qs = pa + ps$. Reſtitue jam $\sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss + \frac{1}{2}as - \frac{1}{4}aa}$ in locum p, & $\sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss}$ in locum q, & habebitur $s\sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss} = \overline{a+s} \times \sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss + \frac{1}{2}as - \frac{1}{4}aa}$. Et quadrando $ss = -\frac{b}{a}s + \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}b$, ſeu $s = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{bb}{4aa} + \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}b}$, quo invento dantur quatuor numeri quæſiti è ſuperioribus.

PROB. XVI.

Si penſio annua librarum a *per quinque annos proxime ſequentes ſolvenda, ematur parata pecunia* c, *quæritur quanti æſtimanda ſit uſura uſuræ centum librarum per annum.*

Pone $1 - x$ uſuram uſuræ pecuniæ x in anno, hoc eſt quod pecunia 1 poſt annum ſolvenda valeat x paratæ pecuniæ; & per analogiam pecunia a poſt annum ſolvenda valebit ax paratæ pecuniæ, poſt duos annos axx, poſt tres ax^3, poſt quatuor ax^4 & poſt quinque ax^5. Adde jam hos quinque terminos & erit $ax^5 + ax^4 + ax^3 + axx + ax = c$, ſeu $x^5 + x^4 + x^3 + xx + x = \frac{c}{a}$, æquatio quinque dimenſionum, cujus ope cum x per † regulas poſt docendas inventum fuerit, pone $x . 1 :: 100 . y$. Et erit $y - 100$ uſura uſuræ centum librarum per annum.

Atque has in quæſtionibus ubi ſolæ quantitatum proportiones abſque poſitionibus linearum conſiderandæ veniunt, inſtantias dediſſe ſufficiat: Pergamus jam ad Problematum Geometricorum ſolutiones.

† *Nempe inveniendo figuras primas radicis per conſtructionem quamvis mechanicam & reliquas per methodum Vietæ.*

Quomodo Quæſtiones Geometricæ ad æquationem redigantur.

TAB. I. Fig. 5.

Quæſtiones *Geometricæ* eadem facilitate iiſdemque legibus ad æquationes nonnunquam redigi poſſunt ac quæ de abſtractis quantitatibus proponuntur. Ut ſi recta AB in extrema & media proportione ſecanda ſit in C, hoc eſt ita ut BE quadratum maximæ partis ſit æquale rectangulo BD ſub tota & minore parte contento: Poſito $AB = a$, & $BC = x$ erit $AC = a - x$, & $xx = a$ in $a - x$; æquatio quæ per reductionem dat $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$.

Sed in rebus Geometricis quæ frequentius occurrunt, à variis linearum poſitionibus & relationibus complexis ita dependere ſolent ut egeant ulteriori inventione & artificio quo ad Algebraicos terminos deduci poſſint. Et licet in hujuſmodi caſibus difficile ſit aliquid præſcribere, & cujuſque ingenium ſibi debeat eſſe operandi norma: Conabor tamen diſcentibus viam præſternere. Sciendum eſt itaque quod quæſtiones circa eaſdem lineas definito quolibet modo ſibi invicem relatas, poſſint varie proponi, ponendo alias atque alias quærendas eſſe ex aliis atque aliis datis. Sed de quibuſcunque tamen datis vel quæſitis inſtituitur quæſtio, ſolutio ejus eadem plane methodo ex Analyſeos ſerie perficietur, nulla omnino circumſtantia variata præter fictas linearum ſpecies ſive nomina quibus datas à quæſitis ſolemus diſtinguere. Quemadmodum ſi quæſtio ſit de Iſoſcele CBD in circulum inſcripto, cujus latera BC, BD, & baſis CD cum diametro circuli AB conferenda ſunt: Ea vel proponi poteſt de inveſtigatione *diametri* ex datis lateribus & baſi, vel de inveſtigatione *baſis* ex datis lateribus & diametro, vel denique de inveſtigatione *laterum* ex datis baſi & diametro: Sed utcunque proponitur, redigetur ad æquationem per eandem ſeriem Analyſeos. Nempe ſi quæratur *Diameter* pono $AB = x$, $CD = a$, & BC vel $BD = b$. Tum (ducta AC) propter ſimilia triangula ABC & CBE eſt AB. BC :: BC. BE, ſive $x . b :: b .$ BE. Quare $BE = \frac{bb}{x}$. Eſt & $CE = \frac{1}{2}CD$ ſive $\frac{1}{2}a$: Et propter angulum CEB rectum, $CEq + BEq = BCq$, hoc

TAB. I. Fig. 6.

hoc eſt $\frac{1}{4}aa+\frac{b^4}{xx}=bb$. Quæ æquatio per reductionem dabit quæſitum x.

Sin quæratur *Baſis*, pono $AB=c$, $CD=x$ & BC vel $BD=b$. Tum (ducta AC) propter ſimilia triangula ABC & CBE eſt AB. BC :: BC. BE, ſive $c.b::b.BE$. Quare $BE=\frac{bb}{c}$. Eſt & $CE=\frac{1}{2}CD$ ſive $\frac{1}{2}x$, & propter angulum CEB rectum $CEq+BEq=BCq$ hoc eſt $\frac{1}{4}xx+\frac{b^4}{cc}=bb$; æquatio quæ per reductionem dabit quæſitum x.

Atque ita ſi *Latus* BC vel BD quæratur, pono $AB=c$, $CD=a$ & BC vel $BD=x$. Et (AC ut ante ducta) propter ſimilia triangula ABC & CBE eſt AB. BC :: BC. BE; ſive $c.x::x.BE$. Quare $BE=\frac{xx}{c}$. Eſt & $CE=\frac{1}{2}CD$ ſive $\frac{1}{2}a$; & propter angulum CEB rectum eſt $CEq+BEq=BCq$, hoc eſt $\frac{1}{4}aa+\frac{x^4}{cc}=xx$; æquatio quæ per reductionem dabit quæſitum x.

Vides itaque quod in unoquoque caſu calculus quo pervenitur ad æquationem, per omnia ſimilis ſit, & eandem æquationem pariat, excepto tantum quod lineas aliis atque aliis literis deſignavi prout datæ vel quæſitæ ponuntur. Ex diverſis quidem datis & quæſitis oritur diverſitas in reductione æquationis inventæ: Nam æquationis $\frac{1}{4}aa+\frac{b^4}{xx}=bb$ alia eſt reductio ut obtineatur $x=\frac{2bb}{\sqrt{4bb-aa}}$ valor de AB, & æquationis $\frac{1}{4}xx+\frac{b^4}{cc}=bb$ alia reductio ut obtineatur $x=\frac{2b}{c}\sqrt{cc-bb}$ valor de CD; & æquationis $\frac{1}{4}aa+\frac{x^4}{cc}=xx$ reductio longe alia ut obtineatur $x=\sqrt{\frac{1}{2}cc\pm\frac{1}{2}c\sqrt{cc-aa}}$ valor de BC vel BD: (perinde ut hæc $\frac{1}{4}aa+\frac{b^4}{cc}=bb$, ad eliciendum $c, a;$

vel *b* diverſis modis reduci debet:) ſed in harum æquationum inventione nulla fuit diverſitas. Et hinc eſt quod jubent ut nullum inter datas & quæſitas quantitates habeatur diſcrimen. Nam cum eadem computatio cuique caſui datorum & quæſitorum competat, convenit ut ſine diſcrimine concipiantur & conferantur quo rectius judicetur de modis computandi: Vel potius convenit ut fingas quæſtionem de ejuſmodi datis & quæſitis propoſitam eſſe per quas arbitreris te poſſe ad æquationem facillime pervenire.

Propoſito igitur aliquo Problemate, quantitates quas involvit confer, & nullo inter datas & quæſitas habito diſcrimine, perpende quomodo aliæ ex aliis dependeant ut cognoſcas quænam ſi aſſumantur, ſynthetice gradiendo, dabunt cæteras. Ad quod faciendum non opus eſt ut prima fronte de modo cogites quo aliæ ex aliis per calculum Algebraicum deduci poſſint, ſed ſufficit animadverſio generalis quod poſſint directo nexu quomodocunque deduci. Verbi gratia; ſi quæſtio ſit de circuli diametro AD tribuſque lineis AB, BC, & CD in ſemicirculo inſcriptis, & ex reliquis datis quæratur BC; primo intuitu manifeſtum eſt diametrum AD determinare ſemicirculum, dein lineas AB & CD per inſcriptionem determinare puncta B & C atque adeo quæſitum BC, idque nexu maxime directo; & quo pacto tamen BC ex his datis per Analyſin eruatur non ita manifeſtum eſt. Hoc idem quoque de AB vel CD ſi ex reliquis datis quærerentur, intelligendum eſt. Quod ſi AD ex datis AB, BC & CD quæreretur, æque patet id non fieri poſſe Synthetice; ſiquidem punctorum A ac D diſtantia dependet ex angulis B & C, & illi anguli ex circulo cui datæ lineæ ſunt inſcribendæ, & ille circulus non datur ignota AD diametro. Rei igitur natura poſtulat ut AD non Synthetice ſed ex ejus aſſumptione quæratur ut ad data fiat regreſſus.

TAB. I. Fig. 7.

Cum varios ordines quibus termini quæſtionis ſic evolvi poſſint perſpexeris, *E ſyntheticis quoſlibet adhibe, aſſumendo lineas tanquam datas à quibus ad alias facillimus videtur progreſſus & ad ipſas viciſſim difficillimus.* Nam computatio ut per varia media poſſit incedere, tamen ab iſtis lineis initium ſumet; ac promptius perficietur fingendo quæſtionem ejuſmodi eſſe ac ſi de iſtis datis & quæſito aliquo ab iſtis facillime prodituro inſtitueretur, quam de quæſtione prout

prout revera proponitur cogitando. Sic in exemplo jam allato ſi ex reliquis datis quæritur A D; cum id ſynthetice fieri non poſſe percipiam, ſed ab ipſo tamen, ſi modo daretur, diſcurſum ad alia directo nexu incedere, aſſumo A D tanquam datum & abinde computationem non ſecus incipio quam ſi revera daretur & aliqua ex datis A B, B C & C D quæreretur. Atque hac methodo computationem ab aſſumptis ad cæteras quantitates eo more promovendo quo linearum relationes dirigunt, æquatio tandem inter duos ejuſdem alicujus quantitatis valores ſemper obtinebitur, ſive ex valoribus unus ſit litera ſub initio operis quantitati pro nomine impoſita, & alter per computationem inventus, ſive uterque per computationem diverſimode inſtitutam inveniatur.

Cæterum ubi terminos quæſtionis ſic in genere comparaveris, plus artis & inventionis in eo requiritur ut advertas particulares iſtos nexus ſive linearum relationes quæ computationi accommodantur. Nam quæ laxius perpendenti videantur immediate & relatione proxima connecti, cum illam relationem algebraice deſignare volumus, circuitum plerumque quoad conſtructiones Schematum de novo moliendas & computationem per gradus promovendam exigunt: Quemadmodum de B C ex A D, A B & C D colligendo conſtare poteſt. Per ejuſmodi enim propoſitiones vel enunciationes ſolummodo gradiendum eſt quæ aptæ ſunt ut terminis algebraicis deſignentur, quales præſertim ab Axiom. 19, Prop. 4. lib. 6, & Prop. 47. lib. 1. Elem. proveniunt.

Imprimis itaque promovetur calculus per additionem vel ſubductionem linearum eo ut ex valoribus partium obtineatur valor totius, vel ex valoribus totius & unius partis obtineatur valor alterius.

Secundo promovetur ex linearum proportionalitate: ponimus enim (ut ſupra) factum à mediis terminis diviſum per alterutrum extremorum eſſe valorem alterius. Vel quod perinde eſt, ſi valores omnium quatuor proportionalium prius habeantur, ponimus æqualitatem inter factos extremorum & factos mediorum. Linearum vero proportionalitas ex triangulorum ſimilitudine maxime ſe prodit, quæ cum ex æqualitate angulorum dignoſcatur, in iis comparandis Ana-

lyſta debet eſſe perſpicax, atque adeo non ignorabit Prop. 5, 13, 15, 29, & 32. lib. 1. Prop. 4, 5, 6, 7, & 8. lib. 6. Et Prop. 20, 21, 22, 27 ac 31. lib. 3. Elementorum. Quibus etiam referri poteſt Prop. 3. lib. 6, ubi ex proportionalitate linearum colligitur angulorum æqualitas & contra. Atque idem aliquando præſtant Prop. 35 & 36. lib. 3.

Tertio promovetur per additionem vel ſubductionem quadratorum. In triangulis nempe rectangulis addimus quadrata minorum laterum ut obtineatur quadratum maximi, vel à quadrato maximi lateris ſubducimus quadratum unius è minoribus ut obtineatur quadratum alterius.

Atque his paucis fundamentis (ſi adnumeretur Prop. 1. lib. 6. Elem. cum de ſuperficiebus agitur, ut & aliquæ propoſitiones ex lib. 11 & 12. deſumptæ cum agitur de ſolidis,) tota Ars Analytica quoad Geometriam rectilineam innititur. Quin etiam ad ſolas linearum ex partibus compoſitiones & ſimilitudines triangulorum poſſunt omnes Problematum difficultates reduci; adeo ut non opus ſit alia Theoremata adhibere: quippe quæ omnia in hæc duo reſolvi poſſunt, & proinde ſolutiones etiam quæ ex iſtis depromuntur. Inque hujus rei inſtantiam ſubjunxi Problema de perpendiculo in baſem obliquanguli trianguli demittendo ſine adjumento Prop. 47. lib. 1 ſolutum. Etſi vero juvet ſimpliciſſima principia à quibus problematum ſolutiones dependent non ignoraſſe, & iſtis ſolis adhibitis poſſe quælibet ſolvere; expeditionis tamen gratia convenit ut non ſolum Prop. 47. lib. 1. Elem. cujus uſus eſt frequentiſſimus; ſed & alia etiam *Theoremata* nonnunquam adhibeantur.

Quemadmodum ſi perpendiculo in baſem obliquanguli trianguli demiſſo, de ſegmentis baſis ad calculum promovendum agatur; ex uſu erit ſcire, quod Differentia quadratorum è lateribus æquetur duplo rectangulo ſub baſi & diſtantia perpendiculi à medio baſis.

Si trianguli alicujus verticalis angulus biſecetur, computationi non ſolum inſerviet quod baſis ſecetur in ratione laterum, ſed etiam quod differentia factorum à lateribus & à ſegmentis baſis æquetur quadrato lineæ biſecantis angulum.

Si de figuris in circulo inſcriptis res eſt, Theorema non raro ſubveniet

veniet quod Inſcripti cujuſlibet quadrilateri factus à diagoniis æquetur ſummæ factorum à lateribus oppoſitis.

Et hujuſmodi plura inter exercendum obſervet Analyſta, & in penum forte reſervet; ſed parcius utatur ſi pari facilitate aut non multo difficilius poſſit ſolutionem è ſimplicioribus computandi principiis extruere. Quamobrem ad tria primo propoſita tanquam notiora, ſimpliciora, magis generalia, pauca, & omnibus tamen ſufficientia animum præſertim advertat, & omnes difficultates ad ea præ cæteris reducere conetur.

Sed ut hujuſmodi Theoremata ad ſolvenda Problemata accommodari poſſint, *Schemata* plerumque ſunt ultra *conſtruenda*, idque ſæpiſſime producendo aliquas ex lineis donec ſecent alias, aut ſint aſſignatæ longitudinis; vel ab inſigniori quolibet puncto ducendo lineas aliis parallelas aut perpendiculares, vel inſigniora puncta conjungendo, ut & aliter nonnunquam conſtruendo, prout exigunt ſtatus Problematis, & Theoremata quæ ad ejus ſolutionem adhibentur. Quemadmodum ſi duæ non concurrentes lineæ datos angulos cum tertia quadam efficiant, producimus forte ut concurrentes conſtituant triangulum cujus anguli & proinde laterum rationes dantur. Vel ſi quilibet angulus detur, aut ſit alicui æqualis, in triangulum ſæpe complemus ſpecie datum, aut alicui ſimile, idque vel producendo aliquas ex lineis in ſchemate vel ſubtenſam aliter ducendo. Si triangulum ſit obliquangulum, in duo rectangula ſæpe reſolvimus, demittendo perpendiculum. Si de figuris multilateris agatur, reſolvimus in triangula, ducendo lineas diagonales: Et ſic in cæteris; ad hanc metam ſemper collimando *ut ſchema in triangula vel data, vel ſimilia, vel rectangula reſolvatur.* Sic in exemplo propoſito duco diagonium BD, ut Trapezium ABCD in duo triangula, ABD rectangulum, & BDC obliquangulum reſolvatur. Deinde reſolvo triangulum obliquangulum in duo rectangula demittendo perpendiculum à quolibet ejus angulo B, C, vel D in latus oppoſitum; quemadmodum à B in CD productam ad E ut huic perpendiculo BE occurrat. Interea vero cum anguli BAD & BCD duos rectos (per 22. 3. Elem.) perinde ac BCE & BCD conſtituant; percipio angulos BAD & BCE æquales eſſe, adeoque triangula Tab. I. Fig. 8.

BCE

BCE ac DAB ſimilia. Atque ita video computationem (aſſumendo AD, AB & BC tanquam ſi CD quæreretur) ad hunc modum inſtitui poſſe, viz. AD & AB (propter tri. ABD rect.) dant BD. AD, AB, BD & BC(propter ſim. tri. ABD&CEB) dant BE & CE. BD&BEC propter triang. BED rect.) dant ED; & ED−EC dat CD. Unde obtinebitur æquatio inter valorem de CD ſic inventum & literam pro ea ſuffectam. Poſſumus etiam (& maximam partem ſatius eſt quàm opus in ſerie continuata nimis proſequi,) à diverſis principiis computationem incipere, aut ſaltem diverſis modis ad eandem quamlibet concluſionem promovere, ut duo tandem obtineantur ejuſdem cujuſvis quantitatis valores qui æquales ponantur. Sic AD, AB & BC dant BD, BE & CE ut prius; deinde CD+CE dat ED; ac denique BD & ED (propter triang. rect. BED) dant BE. Poteſt etiam computatio hac lege optime inſtitui ut valores quantitatum inveſtigentur quibus alia quæpiam relatio cognita intercedit, & illa deinde relatio æquationem dabit. Sic cum relatio inter lineas BD, DC, BC & CE ex Prop. 12. lib. 2. Elem. conſtet; nempe quod ſit $BDq-BCq-CDq=2CD\times CE$: Quæro BDq ex aſſumptis AD & AB; ac CE ex aſſumptis AD, AB & BC. Et aſſumendo denique CD facio $BDq-BCq-CDq=2CD\times CE$. Ad hos modos & hujuſmodi conſiliis ductus, de ſerie Analyſeos, deque ſchemate propter eam conſtruendo ſemper debes una proſpicere.

Ex his credo manifeſtum eſt quid ſibi velint Geometræ cum jubent putes factum eſſe quod quæris. Nullo enim inter cognitas & incognitas quantitates habito diſcrimine, quaſlibet ad ineundum calculum aſſumere potes quaſi omnes ex prævia ſolutione fuiſſent notæ, & non amplius de ſolutione Problematis, ſed de probatione ſolutionis ageretur. Sic in primo ex tribus jam deſcriptis computandi modis, etſi forte AD revera quæratur, fingo tamen CD quærendum eſſe, quaſi vellem probare an valor ejus ab AD derivatus quadret cum ejus quantitate prius cognita. Sic etiam in duobus poſterioribus modis pro meta non propono quantitatem aliquam quærendam eſſe, ſed æquationem è relationibus

nibus linearum utcunque eruendam: Et in ejus rei gratiam aſſumo omnes AD, AB, BC, & CD tanquam notas, perinde ac ſi (quæſtione prius ſoluta) de tentamine jam ageretur an conditionibus ejus hæ probe ſatisfaciant, quadrando cum quibuslibet æquationibus quas linearum relationes produnt. Opus quidem hac ratione & conſiliis prima fronte aggreſſus ſum, ſed cum ad æquationem deventum eſt ſententiam muto, & quantitatem deſideratam per iſtius æquationis reductionem & ſolutionem quæro. Sic denique plures quantitates tanquam cognitas ſæpenumero aſſumimus quam in ſtatu quæſtionis exprimuntur. Hujusque rei inſignem in 55° ſequentium problematum inſtantiam videre eſt, ubi *a*, *b* & *c* in æquatione $aa+bx+cxx=yy$, pro determinatione Sectionis Conicæ aſſumpſi, ut & alias etiam lineas *r*, *s*, *t*, *v* de quibus Problema prout proponitur nihil innuit. Nam quaslibet quantitates aſſumere licet quarum ope poſſibile ſit ad æquationes pervenire: Hoc ſolum cavendo ut ex illis tot æquationes obtineri poſſint quot aſſumptæ ſunt quantitates revera incognitæ.

Poſtquam de computandi methodo conſtat & ornatur ſchema, quantitatibus quæ computationem ingrediuntur (hoc eſt ex quibus aſſumptis aliarum valores derivandi ſunt, donec tandem ad æquationem perveniatur) nomina impone, delegendo quæ problematis omnes conditiones involvunt, & operi præ cæteris accommodatæ videntur, & concluſionem (quantum poſſis conjicere) ſimpliciorem reddent, ſed non plures tamen quam propoſito ſufficiunt. Itaque pro quantitatibus quæ ex aliarum vocabulis facile deduci poſſint, propria vocabula vix tribuas. Sic ex tota linea & ejus partibus, ex tribus lateribus trianguli rectanguli, & ex tribus vel quatuor proportionalibus unum aliquod mininùm ſine nomine permittere ſolemus, eo quod valor ejus è reliquorum nominibus facile derivari poſſit. Quemadmodum in exemplo jam allato ſi dicam $AD=x$ & $AB=a$ ipſum BD nulla litera deſigno quod ſit tertium latus trianguli rectanguli ABD & proinde valeat $\sqrt{xx-aa}$. Dein ſi dicam $BC=b$, cum triangula DAB & BCE ſint ſimilia & inde lineæ AD.AB::BC.CE proportionales, quarum tribus AD, AB, & BC impoſita ſunt nomina; ea propter quartam CE ſine nomine TAB. I. Fig. 8.

 per-

permitto, & ejus vice valorem $\frac{ab}{x}$ ex hac proportionalitate detectum uſurpo. Atque ita ſi DC vocetur c, ipſi DE nomen non aſſigno quod ex partibus ejus DC & CE, ſive c & $\frac{ab}{x}$, valor $c+\frac{ab}{x}$ prodeat.

Cæterum dum de his moneo, Problema ad æquationem pene redactum eſt. Nam poſtquam literæ pro ſpeciebus principalium linearum præſcriptæ ſunt, nihil aliud agendum reſtat quam ut ex iſtis ſpeciebus valores aliarum linearum juxta methodum præconceptam eruantur, donec modo quovis proviſo in æquationem coëant. Et in hoc caſu nihil reſtare video niſi ut per triangula rectangula BCE & BDE dupliciter eliciam BE. Nempe eſt $BCq-CEq$ (ſive $bb-\frac{aabb}{xx}$) $=BEq$, ut & $BDq-DEq$ (ſive $xx-aa-cc-\frac{2abc}{x}-\frac{aabb}{xx}$) $=BEq$. Et hinc (utrobique deleto $\frac{aabb}{xx}$) æquationem habebo $bb=xx-aa-cc-\frac{2abc}{x}$: Quæ reducta fit

$$x^3=\begin{matrix}+aa\\+bb\\+cc\end{matrix}\,x+2abc.$$

Cum vero de ſolutione Problematis hujus plures modos etſi non multum diſſimiles in præcedentibus recenſuerim quorum iſte de Prop. 12. Lib. 2. Elem. deſumptus ſit cæteris quodammodo concinnior; eundem placet etiam ſubjungere. Sit itaque $AD=x$, $AB=a$, $BC=b$, & $CD=c$, eritque $BDq=xx-aa$, & $CE=\frac{ab}{x}$ ut prius. Hiſce dein ſpeciebus in Theorema $BDq-BCq-CDq=2CD\times CE$ ſubſtitutis orietur $xx-aa-bb-cc=\frac{2abc}{x}$; & facta reductione $x^3=\begin{matrix}+aa\\+bb\\+cc\end{matrix}\,x+2abc$. Ut ante.

Sed ut pateat quanta ſit in ſolutionum inventione varietas, & proinde

proinde quod in eas incidere prudenti Geometræ non ſit admodum difficile: Viſum fuit plures adhuc modos hoc idem perficiendi docere. Atque equidem ducto Diagonio B D ſi vice perpendiculi B E à puncto B in latus D C ſupra demiſſi demittatur perpendiculum à puncto D in latus B C vel à puncto C in latus B D, quo obliquangulum triangulum B C D in duo rectangula utcunque reſolvatur, iiſdem ferme quas jam deſcripſi methodis ad æquationem pervenire licet. Sunt & alii modi ab iſtis ſatis differentes.

Quemadmodum ſi diagonii duo A C & B D ducantur, dabitur B D ex aſſumptis A D & A B; ut & A C ex aſſumptis A D & C D; deinde per notum Theorema de figuris quadrilateris in circulo inſcriptis, nempe quod ſit $AD \times BC + AB \times CD = AC \times BD$ obtinebitur æquatio. Stantibus itaque linearum A D, A B, B C, C D vocabulis x, a, b, c; erit $BD = \sqrt{xx - aa}$ & $AC = \sqrt{xx - cc}$ per 47. 1. Elem. Et his linearum ſpeciebus in Theorema jam recenſitum ſubſtitutis, exibit $xb + ac = \sqrt{xx - cc} \times \sqrt{xx - aa}$. Cujus æquationis partibus denique quadratis & reductis obtinebitur iterum $x^3 = \begin{matrix} +aa \\ +bb \\ +cc \end{matrix} x + 2abc$. TAB. I. Fig. 9.

Cæterum ut pateat etiam quo pacto ſolutiones ex iſto Theoremate petitæ poſſint inde ad ſolas triangulorum ſimilitudines redigi; erigatur B H ipſi B C perpendicularis & occurrens A C in H, & fient triangula B C H, B D A ſimilia, propter angulos ad B rectos, & ad C ac D (per 21. 3. Elem.) æquales; ut & triangula B C D, B H A ſimilia, propter æquales angulos tum ad B (ut pateat demendo communem angulum D B H à duobus rectis,) tum ad D ac A (per 21. 3. Elem.). Videre eſt itaque quod ex proportionalitate B D. A D :: B C. H C detur H C; ut & A H ex proportionalitate B D. C D :: A B. A H. Unde cum ſit $AH + HC = AC$, habebitur æquatio. Stantibus ergo præfatis linearum vocabulis x, a, b, c, nec non ipſarum A C & B D valoribus $\sqrt{xx - cc}$ & $\sqrt{xx - aa}$; prima proportionalitas dabit $HC = \frac{bx}{\sqrt{xx - aa}}$, & ſecunda dabit $AH = \frac{ac}{\sqrt{xx - aa}}$.

M 2 Unde

Unde propter AH+HC=AC erit $\frac{bx+ac}{\sqrt{xx-aa}}=\sqrt{xx-cc}$; æquatio quæ (multiplicando per $\sqrt{xx-aa}$ & quadrando) reducetur ad formam in præcedentibus ſæpius deſcriptam.

TAB I. Fig. 10. Adhæc ut magis pateat quanta ſit ſolvendi copia; producantur BC & AD donec conveniant in F, & fient triangula ABF & CDF ſimilia, quippe quorum angulus ad F communis eſt, & anguli ABF & CDF (dum complent ang. CDA ad duos rectos per 13. 1 & 22. 3. Elem.) æquales. Quamobrem ſi præter quatuor terminos de quibus inſtituitur quæſtio, daretur AF, proportio AB.AF::CD.CF daret CF. Item AF−AD daret DF, & proportio CD.DF::AB.BF daret BF; unde (cum ſit BF−CF=BC) emergeret æquatio. Sed cum duæ quantitates incognitæ AD ac DF tanquam datæ aſſumantur, reſtat alia æquatio invenienda. Demitto ergo BG in AF ad rectos angulos, & proportio AD.AB::AB.AG. dabit AG; quo habito, Theorema è 13. 2. Elem. petitum, nempe quod ſit BFq+2FAG=ABq+AFq, dabit æquationem alteram. Stantibus ergo a, b, c, x ut prius, & dicto AF$=y$: erit (inſiſtendo veſtigiis Theoriæ jam excogitatæ) $\frac{cy}{a}$=CF. $y-x$=DF. $\frac{\overline{y-x}\times a}{c}$=BF. Indeque $\frac{\overline{y-x}\times a}{c}-\frac{cy}{a}=b$, æquatio prima. Erit etiam $\frac{aa}{x}$=AG, adeoque $\frac{aayy-2aaxy+aaxx}{cc}+\frac{2aay}{x}=aa+yy$, æquatio ſecunda. Quæ duæ per reductionem dabunt æquationem deſideratam. Nempe valor ipſius y per æquationem priorem inventus eſt $\frac{abc+aax}{aa-cc}$, qui in ſecundam ſubſtitutus, dabit æquationem ex qua recte diſpoſita fiet $x^3=\begin{matrix}+aa\\+bb\\+cc\end{matrix}x+2abc$, ut ante.

Atque ita ſi AB ac DC producantur donec ſibi mutuo occurrant, ſolutio haud aliter ſe habebit, niſi forte futura ſit paulo facilior. Quare aliud hujus rei ſpecimen è fonte multum diſſimili petitum potius ſubjungam, quærendo nempe aream quadrilateri propoſiti, idque dupliciter. Duco igitur diagonium BD ut in duo triangula qua-

quadrilaterum reſolvatur. Dein uſurpatis linearum vocabulis x, a, b, c ut ante, invenio $BD = \sqrt{xx - aa}$ indeque $\frac{1}{2} a \sqrt{xx - aa}$ $(= \frac{1}{2} AB \times BD)$ aream trianguli ABD. Porro demiſſo BE perpendiculariter in CD, (erit propter ſimilia triangula ABD, BCE) AD. BD :: BC. BE, & proinde $BE = \frac{b}{x} \sqrt{xx - aa}$. Quare etiam $\frac{bc}{2x} \sqrt{xx - aa}$ $(= \frac{1}{2} CD \times BE)$ erit area trianguli BCD. Haſce jam areas addendo orietur $\frac{ax + bc}{2x} \sqrt{xx - aa}$ area totius quadrilateri. Non ſecus ducendo diagonium AC & quærendo areas triangulorum ACD & ACB, eaſque addendo, rurſus obtinebitur area quadrilateri $\frac{cx + ba}{2x} \sqrt{xx - cc}$. Quare ponendo haſce areas æquales & utrasque multiplicando per $2x$, habebitur $\overline{ax + bc} \sqrt{xx - aa} = \overline{cx + ba} \times \sqrt{xx - cc}$, æquatio quæ quadrando ac dividendo per $aax - ccx$ redigetur ad formam ſæpius inventam $x^3 = \begin{smallmatrix} +aa \\ +bb \\ +cc \end{smallmatrix} x + 2abc$.

Ex his conſtare poteſt quanta ſit ſolvendi copia & obiter quod alii modi ſint aliis multo concinniores. Quapropter ſi in primas de ſolutione Problematis alicujus cogitationes modus computationi male accommodatus inciderit, relationes linearum iterum evolvendæ ſunt donec modum quám poteris idoneum & elegantem machinatus fueris. Nam quæ leviori curæ ſe offerunt laborem ſatis moleſtum plerumque parient ſi ad opus adhibeantur. Sic in Problemate de quo agitur nil difficilius foret in ſequentem modum quam in aliquem è præcedentibus incidere. Demiſſis nempe BR & CS ad AD normalibus, ut & CT ad BR, figura reſolvetur in triangula rectangula. Et videre eſt quod AD & AB dant AR, AD & CD dant SD, AD − AR − SD dat RS vel TC. Item AB & AR dant BR, CD & SD dant CS vel TR, & BR − TR dat BT. Denique BT ac TC dant BC, unde obtinebitur æquatio. Siquis autem hoc modo computationem aggreſſus fuerit, is in terminos Algebraicos profuſiores quam ſunt ulli præcedentium incidet & ad finalem æquationem ægrius reducibiles.

Tab. I. Fig. 11.

M 3 Et

Et hæc de ſolutione problematum in rectilinea Geometria; niſi forte operæ pretium fuerit annotaſſe præterea quod cum anguli ſive poſitiones linearum per angulos expreſſæ ſtatum quæſtionis ingrediuntur, angulorum vice debent adhiberi lineæ aut linearum proportiones, tales nempe quæ ab angulis datis poſſunt per calculum Trigonometricum derivari; aut à quibus inventis anguli quæſiti per eundem calculum prodeunt; hoc eſt quæ ſe mutuo determinant; cujus rei plures inſtantias videre eſt in ſequentibus.

Quod ad Geometriam circa lineas curvas attinet, illæ deſignari ſolent vel deſcribendo eas per motum localem rectarum, vel adhibendo æquationes indefinite exprimentes relationem rectarum certa aliqua lege diſpoſitarum & ad curvas deſinentium. Idem fecerunt Veteres per ſectiones Solidorum, ſed minus commode. Computationes vero quæ curvas primo modo deſcriptas reſpiciunt haud ſecus quam in præcedentibus peraguntur. Quemadmodum ſi AKC ſit curva linea deſcripta per K verticale punctum normæ AKφ, cujus unum crus AK per punctum A poſitione datum libere dilabitur, dum alterum Kφ datæ longitudinis ſuper rectam AD poſitione datam promovetur, & quæratur punctum C in quo recta quævis CD poſitione data hanc curvam ſecabit; duco rectas ACF quæ normam in poſitione quæſita referant, & relatione linearum (ſine aliquo dati & quæſiti diſcrimine aut reſpectu ad curvam) conſiderata, percipio dependentiam cæterarum à CF & qualibet harum quatuor BC, BF, AF & AC Syntheticam eſſe; quarum duas itaque ut $CF=a$ & $CB=x$ aſſumo, & inde computum ordiendo ſtatim lucratus ſum $BF=\sqrt{aa-xx}$ & $AB=\frac{xx}{\sqrt{aa-xx}}$ propter ang. rectum CBF, lineaſque BF. BC::BC. AB continue proportionales. Porro ex data poſitione CD datur AD quam itaque dico b, datur etiam ratio BC ad BD quam pono d ad e & fit $BD=\frac{ex}{d}$ & $AB=b-\frac{ex}{d}$. Eſt ergo $b-\frac{ex}{d}=\frac{xx}{\sqrt{aa-xx}}$, æquatio quæ (quadrando partes & multiplicando per $aa-xx$ &c.) reducetur ad hanc formam

Tab. I. Fig. 12.

$x^4=$

$$x^4 = \frac{2bdex^3 \begin{smallmatrix}-bbdd\\+aaee\end{smallmatrix}\, xx - 2aabdex + aabbdd}{dd+ee};$$ unde demum è datis a, b, d, & e erui debet x per regulas poſt tradendas, & intervallo iſto x ſive BC acta ipſi AD parallela recta ſecabit CD in quæſito puncto C.

Quod ſi non deſcriptiones Geometricæ ſed æquationes pro curvis lineis deſignandis adhibeantur, computationes eo pacto faciliores & breviores evadent, in quantum ejuſmodi æquationes ipſis lucro cedunt. Quemadmodum ſi datæ Ellipſeos ACE interſectio C cum recta CD poſitione data quæratur; pro Ellipſi deſignanda ſumo notam aliquam æquationem ei propriam, ut $rx - \frac{r}{q}xx = yy$ ubi x indefinite ponitur pro qualibet axis parte Ab vel AB, & y pro perpendiculo bc vel BC ad curvam terminato; r vero & q dantur ex datâ ſpecie Ellipſis. Cum itaque CD poſitione detur, dabitur & AD, quam dic a; & erit BD $a - x$; dabitur etiam angulus ADC & inde ratio BD ad BC quam dic 1 ad e, & erit BC $(y) = ea - ex$, cujus quadratum $eeaa - 2eeax + eexx$ æquabitur $rx - \frac{r}{q}xx$. Indeque per reductionem orietur Tab. I. Fig. 13.

$$xx = \frac{2aeex + rx - aaee}{ee + \frac{r}{q}},\ \text{ſeu}\ x = \frac{aee + \frac{1}{2}r \pm e\sqrt{ar + \frac{rr}{4ee} - \frac{aar}{q}}}{ee + \frac{r}{q}}.$$

Quinetiam etſi Curva per deſcriptionem Geometricam vel per ſectionem ſolidi deſignetur, poteſt tamen inde æquatio obtineri quæ naturam Curvæ definiet, adeoque huc omnes Problematum quæ circa eam proponuntur difficultates reduci.

Sic in exemplo priori ſi AB dicatur x & BC y, tertia proportionalis BF erit $\frac{yy}{x}$, cujus quadratum una cum quadrato BC æquatur CFq, hoc eſt $\frac{y^4}{xx} + yy = aa$; ſive $y^4 + xxyy = aaxx$. Eſtque hæc æquatio qua Curvæ AKC unumquodque punctum C unicuique Tab. I. Fig. 12.

cuique baſis longitudini A B congruens (adeoque ipſa Curva) definitur, & è qua proinde ſolutiones Problematum quæ de hac curva proponuntur petere liceat.

Ad eundem fere modum cum curva non datur ſpecie ſed determinanda proponitur, poſſis pro arbitrio æquationem fingere quæ naturam ejus generaliter contineat; & hanc pro ea deſignanda tanquam ſi daretur aſſumere, ut ex ejus aſſumptione quomodocunque perveniatur ad æquationes ex quibus aſſumpta tandem determinentur: Cujus rei exempla habes in nonnullis ſequentium problematum quæ in pleniorem illuſtrationem hujus doctrinæ & exercitium diſcentium congeſſi, quæque jam pergo tradere.

PROB. I.

Tab. I. Fig. 14. *Data recta terminata BC a cujus extremitatibus duæ rectæ BA, CA, ducuntur in datis angulis ABC, ACB: Invenire AD altitudinem concurſus A ſupra datam BC.*

SIT BC$=a$, & AD$=y$; & cum angulus ABD detur, dabitur (ex tabula ſinuum vel tangentium) ratio inter lineas AD & BD quam pone ut d ad e. Eſt ergo $d.e::$AD(y). BD Quare BD$=\frac{ey}{d}$. Similiter propter datum angulum ACD dabitur ratio inter AD ac DC quam pone ut d ad f & erit DC$=\frac{fy}{d}$. At BD+DC=BC, hoc eſt $\frac{ey}{d}+\frac{fy}{d}=a$. Quæ reducta multiplicando utramque partem æquationis per d, ac dividendo per $e+f$ evadit $y=\frac{ad}{e+f}$.

PROB.

PROB. II.

Cujuſlibet Trianguli ABC datis lateribus AB, AC, & Baſi BC, quam perpendiculum AD ab angulo verticali ſecat in D: Invenire ſegmenta BD ac DC. TAB. I. Fig. 15.

SIT $AB=a$, $AC=b$, $BC=c$, & $BD=x$, eritque $DC=c-x$. Jam cum $ABq-BDq\ (aa-xx)=ADq$; & $ACq-DCq\ (bb-cc+2cx-xx)=ADq$: Erit $aa-xx=bb-cc+2cx-xx$; quæ per reductionem fit $\frac{aa-bb+cc}{2c}=x$.

Cæterum ut pateat omnes omnium Problematum difficultates per ſolam linearum proportionalitatem ſine adminiculo Prop. 47. primi Elementorum, licet non abſque circuitu, enodari poſſe; placuit ſequentem hujus ſolutionem ex abundanti ſubjungere. A puncto D in latus AB demitte DE normalem, & ſtantibus jam poſitis linearum nominibus, erit AB: BD::BD. BE. $a.x::x.\frac{xx}{a}$. Et $BA-BE\ (a-\frac{xx}{a})=EA$. Nec non EA. AD::AD. AB adeoque $EA\times AB\ (aa-xx)=ADq$. Et ſic ratiocinando circa triangulum ACD invenietur iterum $ADq=bb-cc+2cx-xx$. Unde obtinebitur ut ante $x=\frac{aa-bb+cc}{2c}$.

PROB. III.

Trianguli rectanguli ABC perimetro & area datis invenire hypotenuſam BC. TAB. II. Fig. 1.

ESTO perimeter a, area bb, $BC=x$, & $AC=y$; eritque $AB=\sqrt{xx-yy}$; unde rurſus perimeter (BC+AC+AB) eſt $x+y+\sqrt{xx-yy}$, & area ($\frac{1}{2}AC\times AB$) eſt $\frac{1}{2}y\sqrt{xx-yy}$. Adeoque $x+y+\sqrt{xx-yy}=a$, & $\frac{1}{2}y\sqrt{xx-yy}=bb$.

Harum æquationum poſterior dat $\sqrt{xx-yy}=\frac{2bb}{y}$ quare ſcribo

$\frac{2bb}{y}$ pro $\sqrt{xx - yy}$ in æquatione priori ut aſſymmetria tollatur; & prodit $x + y + \frac{2bb}{y} = a$, ſive multiplicando per y, & ordinando $yy = ay - xy - 2bb$. Porro ex partibus æquationis prioris auſero $x + y$ & reſtat $\sqrt{xx - yy} = a - x - y$, cujus partes quadrando ut aſſymmetria rurſus tollatur, prodit $xx - yy = aa - 2ax - 2ay + xx + 2xy + yy$, quæ in ordinem redacta & per 2 diviſa fit $yy = ay - xy + ax - \frac{1}{2}aa$. Denique ponendo æqualitatem inter duos valores ipſius yy, habeo $ay - xy - 2bb = ay - xy + ax - \frac{1}{2}aa$, quæ reducta fit $\frac{1}{2}a - \frac{2bb}{a} = x$.

Idem aliter.

Eſto ½ perimeter $= a$, area $= bb$, & $BC = x$ eritque $AC + AB = 2a - x$. Jam cum ſit xx $(BCq) = ACq + ABq$, & $4bb = 2AC \times AB$, erit $xx + 4bb = ACq + ABq + 2AC \times AB =$ quadrato ex $AC + AB =$ quadrato ex $2a - x = 4aa - 4ax + xx$. Hoc eſt $xx + 4bb = 4aa - 4ax + xx$; quæ reducta fit $a - \frac{bb}{a} = x$.

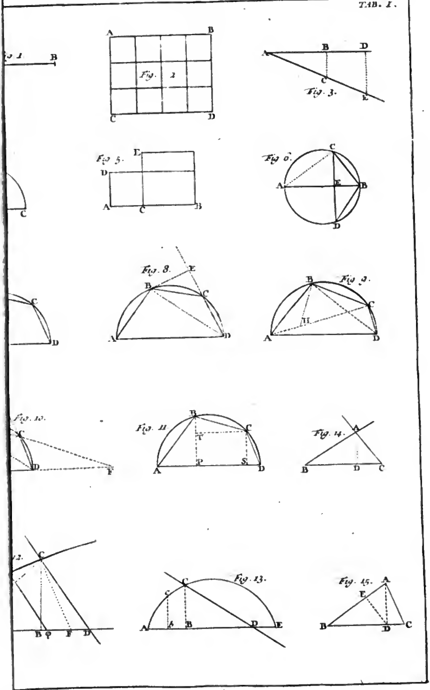
PROB. IV.

Dato trianguli rectanguli perimetro & perpendiculo, invenire triangulum.

Tab. II. Fig. 10.

Trianguli ABC ſit C rectus angulus & CD perpendiculum inde ad baſem AB demiſſum. Detur $AB + BC + AC = a$, & $CD = b$. Pone baſem $AB = x$, & erit laterum ſumma $a - x$. Pone laterum differentiam y, & erit majus latus $AC = \frac{a - x + y}{2}$; minus $BC = \frac{a - x - y}{2}$. Jam ex natura trianguli rectanguli eſt $ACq + BCq = ABq$, hoc eſt $\frac{aa - 2ax + xx + yy}{2} = xx$. Eſt &

AB.



Digitized by Google

Digitized by Google

AB. AC::BC. DC, adeoque $AB \times DC = AC \times BC$, hoc eſt $bx = \frac{aa - 2ax + xx - yy}{4}$. Per priorem æquationem eſt $yy = xx + 2ax - aa$. Per poſteriorem $yy = xx - 2ax + aa - 4bx$. Adeoque $xx + 2ax - aa = xx - 2ax + aa - 4bx$. Et per reductionem $4ax + 4bx = 2aa$, ſive $x = \frac{aa}{2a + 2b}$.

Geometrice ſic. In omni triangulo rectangulo, ut eſt ſumma perimetri & perpendiculi ad perimetrum, ita dimidium perimetri ad baſem.

Aufer $2x$ de a, & reſtabit $\frac{ab}{a+b}$ exceſſus laterum ſuper baſem. Unde rurſus, Ut in omni triangulo rectangulo, ſumma perimetri & perpendiculi ad perimetrum, ita perpendiculum ad exceſſum laterum ſuper baſem.

PROB. V.

Datis trianguli rectanguli baſi AB, & ſumma perpendiculi & laterum CA+CB+CD, invenire triangulum. Tab. II. Fig. 10.

Esto $CA + CB + CD = a$, $AB = b$, $CD = x$, & erit $AC + CB = a - x$. Pone $AC - CB = y$, & erit $AC = \frac{a - x + y}{2}$, & $CB = \frac{a - x - y}{2}$. Eſt autem $ACq + CBq = ABq$, hoc eſt $\frac{aa - 2ax + xx + yy}{2} = bb$. Eſt & $AC \times CB = AB \times CD$, hoc eſt $\frac{aa - 2ax + xx - yy}{4} = bx$. Quibus comparatis fit $2bb - aa + 2ax - xx = yy = aa - 2ax + xx - 4bx$. Et per reductionem $xx = 2ax + 2bx - aa + bb$, & $x = a + b - \sqrt{2ab + 2bb}$.

Geometrice ſic. In omni triangulo rectangulo de ſumma perimetri &

& perpendiculi aufer mediam proportionalem inter eandem ſummam & duplum baſis, & reſtabit perpendiculum.

Idem aliter.

Sit $CA+CB+CD=a$, $AB=b$, & $AC=x$, & erit $BC=\sqrt{bb-xx}$, $CD=\frac{x\sqrt{bb-xx}}{b}$. Et $x+CB+CD=a$, ſive $CB+CD=a-x$, atque adeo $\frac{b+x}{b}\sqrt{bb-xx}=a-x$. Et quadratis partibus atque multiplicatis per bb, fiet $-x^4-2bx^3+2b^3x+b^4=aabb-2abbx+bbxx$. Qua æquatione per tranſpoſitionem partium ad hunc modum ordinata $x^4+2bx^3\begin{smallmatrix}+3bb\\+2ab\end{smallmatrix}xx\begin{smallmatrix}+2b^3\\+2abb\end{smallmatrix}x\begin{smallmatrix}+b^4\\+2ab^3\\+aabb\end{smallmatrix}=\begin{smallmatrix}2bb\\+2ab\end{smallmatrix}xx\begin{smallmatrix}+4b^3\\+4abb\end{smallmatrix}x\begin{smallmatrix}+2b^4\\+2ab^3\end{smallmatrix}$, & extracta utrobique radice, orietur $xx+bx+bb+ab=\overline{x+b}\sqrt{2ab+2bb}$. Et extracta iterum radice $x=-\frac{1}{2}b+\sqrt{\frac{1}{2}bb+\frac{1}{2}ab}\pm\sqrt{b\sqrt{\frac{1}{2}bb+\frac{1}{2}ab}-\frac{1}{4}bb-\frac{1}{2}ab}$.

Conſtructio Geometrica.

Tab. II. Fig. 2. Cape igitur $AB=\frac{1}{2}b$, $BC=\frac{1}{2}a$, $CD=\frac{1}{2}AB$, AE mediam proportionalem inter b & AC, & EF hinc inde mediam proportionalem inter b & DE, & erunt BF, BF duo latera trianguli.

PROB. VI.

Tab. II. Fig. 10.

Datis in triangulo rectangulo ABC ſumma laterum AC+BC, & perpendiculo CD invenire triangulum.

Sit $AC+BC=a$, $CD=b$, $AC=x$, & erit $BC=a-x$, $AB=\sqrt{aa-2ax+2xx}$. Eſt & $CD.AC::BC.AB$. Ergo rurſus $AB=\frac{ax-xx}{b}$. Quare $ax-xx=b\sqrt{aa-2ax+2xx}$,

&

& partibus quadratis & ordinatis $x^4 - 2ax^3 \begin{smallmatrix} + aa \\ - 2bb \end{smallmatrix} xx + 2abbx - aabb = 0$. Adde ad utramque partem $aabb + b^4$, & fiet $x^4 - 2ax^3 \begin{smallmatrix} + aa \\ - 2bb \end{smallmatrix} xx + 2abbx + b^4 = aabb + b^4$. Et extracta utrobique radice $xx - ax - bb = - b \times \sqrt{aa + bb}$, & radice iterum extracta $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb - b\sqrt{aa + bb}}$.

Conſtructio Geometrica.

Cape $AB = BC = \frac{1}{2}a$. Ad C erige perpendiculum $CD = b$. Tab. II. Fig. 3.
Produc DC ad E ut ſit $DE = DA$. Et inter CD & CE cape medium proportionale CF. Centroque F, radio BC deſcriptus circulus GH ſecet rectam BC in G & H, & erunt BG & BH latera duo trianguli.

Idem aliter.

Sit $AC + BC = a$, $AC - BC = y$, $AB = x$, ac $DC = b$, Tab. II. Fig. 10.
& erit $\frac{a+y}{2} = AC$, $\frac{a-y}{2} = BC$, $\frac{aa+yy}{2} = ACq + BCq = ABq = xx$. $\frac{aa-yy}{4b} = \frac{AC \times BC}{DC} = AB = x$. Ergo $2xx - aa = yy = aa - 4bx$, & $xx = aa - 2bx$, & extracta radice $x = -b + \sqrt{bb + aa}$. Unde in ſuperiori conſtructione eſt CE Hypotenuſa trianguli quæſiti. Data autem baſi & perpendiculo tam in hoc quam in ſuperiore Problemate, triangulum ſic expedite conſtruitur. Fac parallelogrammum CG cujus latus CE erit baſis trianguli, latus alterum CF perpendiculum. Et ſuper CE deſcribe ſemicirculum ſecantem latus oppoſitum FG in H. Age CH, EH, & erit CHE triangulum quæſitum. Tab. II. Fig 4.

N 3 PROB.

Digitized by Google

PROB. VII.

In triangulo rectangulo, datis ſumma laterum, & ſumma perpendiculi & baſis invenire Triangulum.

TAB. II. Fig. 10. SIT laterum AC & BC ſumma a, baſis AB & perpendiculi CD ſumma b, latus $AC = x$, baſis $AB = y$, & erit $BC = a - x$, $CD = b - y$, $aa - 2ax + 2xx = ACq + BCq = ABq = yy$, $ax - xx = AC \times BC = AB \times CD = by - yy = by - aa + 2ax - 2xx$, & $by = aa - ax + xx$. Hujus quadratum $a^4 - 2a^3x + 3aaxx - 2ax^3 + x^4$, pone æquale yy in bb, hoc eſt æquale $aabb - 2abbx + 2bbxx$. Et ordinata æquatione fiet $x^4 - 2ax^3 \begin{array}{l} +3aa \\ -2bb \end{array} xx \begin{array}{l} -2a^3 \\ +2abb \end{array} x \begin{array}{l} +a^4 \\ -aabb \end{array} = 0$. Ad utramque partem æquationis adde $b^4 - aabb$, & fiet $x^4 - 2ax^3 \begin{array}{l} +3aa \\ -2bb \end{array} xx \begin{array}{l} -2a^3 \\ +2abb \end{array} x \begin{array}{l} +a^4 \\ -2aabb \\ +b^4 \end{array} = b^4 - aabb$. Et extracta utrobique radice $xx - ax + aa - bb = -b\sqrt{bb - aa}$. & radice iterum extracta $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{bb - \frac{3}{4}aa - b\sqrt{bb - aa}}$.

Conſtructio Geometrica.

Cape R mediam proportionalem inter $b + a$ & $b - a$, & S mediam proportionalem inter R & $b - R$, & T mediam proportionalem inter $\frac{1}{2}a + S$ & $\frac{1}{2}a - S$, & erunt $\frac{1}{2}a + T$ & $\frac{1}{2}a - T$, latera trianguli.

PROB. VIII.

Trianguli cujuſcunque ABC, datis area, perimetro, & uno angulorum A, cætera determinare.

TAB. II. Fig. 5. ESTO perimeter $= a$, & area $= bb$, & ab ignotorum angulorum alterutro C ad latus oppoſitum AB demitte perpendiculum CD; & propter angulum A datum, erit AC ad CD in data ratione,

tione, puta d ad e. Dic ergo $AC=x$ & erit $CD=\frac{ex}{d}$, per quam divide duplam aream, & prodibit $\frac{2bbd}{ex}=AB$. Adde AD (nempe $\sqrt{ACq-CDq}$, ſive $\frac{x}{d}\sqrt{dd-ee}$) & emerget $BD=\frac{2bbd}{ex}+\frac{x}{d}\sqrt{dd-ee}$; cujus quadrato adde CDq & oritur $\frac{4b^4dd}{eexx}+xx+\frac{4bb}{e}\times\sqrt{dd-ee}=BCq$. Adhæc à perimetro aufer AC & AB, & reſtabit $a-x-\frac{2bbd}{ex}=BC$, cujus quadratum $aa-2ax+xx-\frac{4abbd}{ex}+\frac{4bbd}{e}+\frac{4b^4dd}{eexx}$ pone æquale quadrato prius invento; &, neglectis æquipollentibus, erit $\frac{4bb}{e}\sqrt{dd-ee}=aa-2ax-\frac{4abbd}{ex}+\frac{4bbd}{e}$. Et hæc, aſſumendo $4af$ pro datis terminis $aa+\frac{4bbd}{e}-\frac{4bb}{e}\times\sqrt{dd-ee}$, & reducendo, evadit $xx=2fx-\frac{2bbd}{e}$, ſive $x=f\pm\sqrt{ff-\frac{2bbd}{e}}$.

Eadem æquatio prodiiſſet etiam quærendo crus AB; nam crura AB & AC ſimiliter ſe habent ad omnes conditiones problematis. Quare ſi AC ponatur $f-\sqrt{ff-\frac{2bbd}{e}}$ erit $AB=f+\sqrt{ff-\frac{2bbd}{e}}$, & viciſſim; atque horum ſumma $2f$ ſubducta de perimetro relinquit tertium latus $BC=a-2f$.

PROB. IX.

Datis altitudine, baſi, & ſumma laterum invenire triangulum.

SIT altitudo $CD=a$, baſis AB dimidium $=b$, laterum ſemiſumma $=c$, & ſemidifferentia $=z$; eritque majus latus, puta Tab. II. Fig. 5.

BC

$BC = c+z$, & minus $AC = c-z$. Subduc CDq de BCq & ACq, & exibit hinc $BD = \sqrt{cc+2cz+zz-aa}$, & inde $AD = \sqrt{cc-2cz+zz-aa}$. Subduc etiam AB de BD & exibit iterum $AD = \sqrt{cc+2cz+zz-aa} - 2b$. Quadratis jam valoribus AD & ordinatis terminis, orietur $bb+cz = b\sqrt{cc+2cz+zz-aa}$. Rurſusque quadrando & redigendo in ordinem obtinebitur $cczz - bbzz = bbcc - bbaa - b^4$. Et $z = b\sqrt{1 - \frac{aa}{cc-bb}}$. Unde dantur latera.

PROB. X.

Datis baſi AB, ſumma laterum AC+BC, & angulo verticali C, determinare latera.

Tab. II. Fig. [illegible]

SIT baſis $= a$, ſemiſumma laterum $= b$, & ſemidifferentia $= x$, eritque majus latus $BC = b+x$ & minus $AC = b-x$. Ab alterutro ignotorum angulorum A ad latus oppoſitum BC demitte perpendiculum AD & propter angulum C datum dabitur ratio AC ad CD puta d ad e, & proinde erit $CD = \frac{eb-ex}{d}$. Eſt etiam per 13. II. Elementorum $\frac{ACq - ABq + BCq}{2BC}$ hoc eſt $\frac{2bb+2xx-aa}{2b+2x} = CD$; adeoque habetur æquatio inter valores CD. Et hæc reducta fit $x = \sqrt{\frac{daa+2ebb-2dbb}{2d+2e}}$. Unde dantur latera.

Si anguli ad baſin quærerentur, concluſio foret concinnior; utpote ducatur EC datum angulum biſecans & baſi occurrens in E; & erit AB.AC+BC (: : AE.AC) : : ſin. ang. ACE. ſin. ang. AEC. Et ab angulo AEC ejuſque complemento BEC ſi ſubducatur dimidium anguli C relinquentur anguli ABC & BAC.

PROB.

PROB. XI.

Datis Trianguli lateribus invenire angulos.

Dentur latera $AB=a$, $AC=b$, $BC=c$, quæratur angulus A. Demiſſo ad AB perpendiculo CD quod angulo iſti opponitur, erit imprimis $bb-cc=ACq-BCq=ADq-BDq=\overline{AD+BD}\times\overline{AD-BD}=AB\times\overline{2AD-AB}=2AD\times a-aa$. Adeoque $\frac{1}{2}a+\frac{bb-cc}{2a}=AD$. Unde prodit hocce *primum Theorema*. Tab. II. Fig. 7.

I. Ut AB, ad AC+BC, ita AC−BC, ad quartam proportionalem N. $\frac{AB+N}{2}=AD$. Ut AC ad AD, ita radius ad Coſinum anguli A.

Adhæc $DCq=ACq-ADq=\frac{2aabb+2aacc+2bbcc-a^4-b^4-c^4}{4aa}$ $=\frac{\overline{a+b+c}\times\overline{a+b-c}\times\overline{a-b+c}\times\overline{-a+b+c}}{4aa}$ Unde multiplicatis numeratoris & denominatoris radicibus per b, conflatur hocce *Theorema ſecundum.*

II. Ut $2ab$ ad medium proportionale inter $\overline{a+b+c}\times\overline{a+b-c}$, & $\overline{a-b+c}\times\overline{-a+b+c}$, ita radius ad ſinum anguli A.

Inſuper in AB Cape AE=AC, & Age CE, & erit angulus ECD æqualis dimidio anguli A. Aufer AD de AE, & reſtabit $DE=b-\frac{1}{2}a-\frac{bb+cc}{2a}=\frac{cc-aa+2ab-bb}{2a}=\frac{\overline{c+a-b}\times\overline{c-a+b}}{2a}$.

Unde $DEq=\frac{\overline{c+a-b}\times\overline{c+a-b}\times\overline{c-a+b}\times\overline{c-a+b}}{4aa}$. Et hinc conſit *Theorema tertium quartumque*, *viz.*

III. Ut $2ab$ ad $\overline{c+a-b}\times\overline{c-a+b}$ (ita AC ad DE) ita radius ad ſinum verſum anguli A.

IV. Et, ut medium proportionale inter $a+b+c$, & $a+b-c$ ad medium proportionale inter $c+a-b$, & $c-a+b$ (ita CD ad DE)

ita radius ad tangentem dimidii anguli A, vel dimidii cotangens ad radium.

Præterea eſt $CEq = CDq + DEq = \frac{2abb+bcc-baa-b^3}{a}$

$= \frac{b}{a} \times \overline{c+a-b} \times \overline{c-a+b}$. Unde *Theorema quintum & ſextum.*

V. Ut medium proportionale inter $2a$ & $2b$ ad medium proportionale inter $c+a-b$, & $c-a+b$, vel ut 1 ad medi. proportionale inter $\frac{c+a-b}{2a}$, & $\frac{c-a+b}{2b}$ (ita AC ad $\frac{1}{2}$CE vel CE ad DE) ita radius ad ſinum dimidii anguli A.

VI. Et ut medium proportionale inter $2a$ & $2b$ ad medium proportionale inter $a+b+c$, & $a+b-c$ (ita CE ad CD) ita radius ad coſinum dimidii anguli A.

Si præter angulos deſideretur etiam area trianguli, duc CDq in $\frac{1}{4}ABq$, & radix *viz.* $\frac{1}{4}\sqrt{\overline{a+b+c} \times \overline{a+b-c} \times \overline{a-b+c} \times \overline{-a+b+c}}$, erit area illa quæſita.

PROB. XII.

Trianguli cujuſvis rectilinei datis lateribus & baſi, invenire ſegmenta baſis, perpendiculum, aream & angulos.

Tab. II. Fig. 8.

Trianguli ABC dentur latera AC, BC & baſis AB. Biſeca AB in I & in ea utrinque producta cape AF & AE æquales AC, atque BG & BH æquales BC. Junge CE, CF; & à C ad baſem demitte perpendiculum CD. Et erit $ACq - BCq = ADq + CDq - CDq - BDq = ADq - BDq = \overline{AD+BD} \times \overline{AD-BD} = AB \times 2DI$. Ergo $\frac{ACq - BCq}{2AB} = DI$. Et $2AB. \; AC+BC :: AC-BC. \; DI$. Quod eſt Theorema pro determinandis ſegmentis baſis.

De IE, hoc eſt de $AC - \frac{1}{2}AB$ aufer DI, & reſtabit

ſtabit $DE = \frac{BCq - ACq + 2AC \times AB - ABq}{2AB}$, hoc eſt $= \frac{\overline{BC+AC-AB} \times \overline{BC-AC+AB}}{2AB}$, ſive $= \frac{HE \times EG}{2AB}$. Aufer DE de FE ſive 2AC, & reſtabit $FD = \frac{ACq + 2AC \times AB + ABq - BCq}{2AB}$, hoc eſt $= \frac{\overline{AC+AB+BC} \times \overline{AC+AB-BC}}{2AB}$, ſive $= \frac{FG \times FH}{2AB}$.

Et cum ſit CD medium proportionale inter DE ac DF, CE medium proportionale inter DE & EF, ac CF medium proportionale inter DF & EF: erit $CD = \frac{\sqrt{FG \times FH \times HE \times EG}}{2AB}$, $CE = \sqrt{\frac{AC \times HE \times EG}{AB}}$, & $CF = \sqrt{\frac{AC \times FG \times FH}{AB}}$. Duc CD in $\frac{1}{2}AB$ & habebitur area $= \frac{1}{4}\sqrt{FG \times FH \times HE \times EG}$. Pro angulo vero A determinando prodeunt Theoremata multiplicia, *viz.*

1. $2AB \times AC : HE \times EG$ (:: AC . DE) :: radius ad ſinum verſum anguli A.

2. $2AB \times AC . FG \times FH$ (:: AC . FD) :: radius ad coſin. verſ. A.

3. $2AB \times AC . \sqrt{FG \times FH \times HE \times EG}$ (:: AC . CD) :: rad. ad ſin. A.

4. $\sqrt{FG \times FH} . \sqrt{HE \times EG}$ (:: CF . CE) :: rad. ad tang. $\frac{1}{2}$ A.

5. $\sqrt{HE \times EG} . \sqrt{FG \times FH}$ (:: CE . FC) :: rad. ad cotang. $\frac{1}{2}$ A.

6. $2\sqrt{AB \times AC} . \sqrt{HE \times EG}$ (:: FE . CE) :: rad. ad ſin. $\frac{1}{2}$ A.

7. $2\sqrt{AB \times AC} . \sqrt{FG \times FH}$ (:: FE . FC) :: rad. ad coſin. $\frac{1}{2}$ A.

PROB. XIII.

TAB. II. Fig. 9. *Datum angulum CBD recta data CD ſubtendere; ita ut ſi à termino iſtius rectæ D ad punctum A in recta CB producta datum agatur AD, fuerit angulus ADC æqualis angulo ABD.*

Dicatur $CD=a$, $AB=b$, $BD=x$, & erit $BD.BA::CD.DA=\frac{ab}{x}$. Demitte perpendiculum DE, Erit $BE=\frac{BDq-ADq+BAq}{2BA}$ $=\frac{xx-\frac{aabb}{xx}+bb}{2b}$. Ob datum angulum DBA pone $BD.BE::b.e$, & habebitur iterum $BE=\frac{ex}{b}$, ergo $xx-\frac{aabb}{xx}+bb=2ex$. Et $x^4-2ex^3+bbxx-aabb=0$.

PROB. XIV.

TAB. II. Fig. 10. *Invenire Triangulum ABC cujus tria latera AB, AC, BC & perpendiculum DC, ſunt in Arithmetica progreſſione.*

Dic $AC=a$, $BC=x$; & erunt $DC=2x-a$, & $AB=2a-x$. Erunt etiam $AD\,(=\sqrt{ACq-DCq})=\sqrt{4ax-4xx}$ & $BD\,(=\sqrt{BCq-DCq})=\sqrt{4ax-3xx-aa}$. Atque adeo rurſus $AB=\sqrt{4ax-4xx}+\sqrt{4ax-3xx-aa}$. Quare $2a-x=\sqrt{4ax-4xx}+\sqrt{4ax-3xx-aa}$, ſive $2a-x-\sqrt{4ax-4xx}=\sqrt{4ax-3xx-aa}$. Et partibus quadratis $4aa-3xx-\overline{4a+2x}\sqrt{4ax-4xx}=4ax-3xx-aa$, ſive $5aa-4ax=\overline{4a-2x}\sqrt{4ax-4xx}$. Et partibus iterum quadratis ac terminis rite diſpoſitis $16x^4-80ax^3+144aaxx-104a^3x+25a^4=0$. Hanc æquationem

tionem

tionem divide per $2x-a$, & orietur $8x^3-36axx+54aax-25a^3=0$, æquatio cujus reſolutione dabitur x ex aſſumpto utcunque a. Habitis a & x conſtitue triangulum cujus latera erunt $2a-x$, a, & x; & perpendiculum in latus $2a-x$ demiſſum erit $2x-a$.

Si poſuiſſem differentiam laterum trianguli eſſe d, & perpendiculum eſſe x; opus evaſiſſet aliquanto concinnius, prodeunte tandem æquatione $x^3=24ddx+48d^3$.

PROB. XV.

Invenire Triangulum ABC cujus tria latera AB, AC, BC, & perpendiculum CD, ſunt in Geometrica progreſſione. TAB. II. Fig. 10.

Dic $AC=x$, & $BC=a$; & erit $AB=\frac{xx}{a}$. Et $CD=\frac{aa}{x}$. Eſt & AD $(=\sqrt{ACq-CDq})=\sqrt{xx-\frac{a^4}{xx}}$; & BD $(=\sqrt{BCq-DCq})$ $=\sqrt{aa-\frac{a^4}{xx}}$; adeoque $\frac{xx}{a}$ $(=AB)=\sqrt{xx-\frac{a^4}{xx}}+\sqrt{aa-\frac{a^4}{xx}}$, ſive $\frac{xx}{a}-\sqrt{aa-\frac{a^4}{xx}}=\sqrt{xx-\frac{a^4}{xx}}$. Et partibus æquationis quadratis, $\frac{x^4}{aa}-\frac{2xx}{a}\times\sqrt{aa-\frac{a^4}{xx}}+aa-\frac{a^4}{xx}=xx-\frac{a^4}{xx}$, hoc eſt $x^4-aaxx+a^4=2aax\sqrt{xx-aa}$. Et partibus iterum quadratis $x^8-2aax^6+3a^4x^4-2a^6xx+a^8=4a^4x^4-4a^6xx$. Hoc eſt $x^8-2aax^6-a^4x^4+2a^6xx+a^8=0$. Divide hanc æquationem per $x^4-aaxx-a^4$, & orietur $x^4-aaxx-a^4$. Quare eſt $x^4=aaxx+a^4$. Et extracta radice $xx=\frac{1}{2}aa+\sqrt{\frac{5}{4}a^4}$, ſive $x=a\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}}$. Cape ergo ſive BC cujuſvis longitudinis, & fac $BC.AC::AC.AB::1.\sqrt{\frac{1}{2}+\ [illegible]}$; & trianguli ABC ex his lateribus conſtituti perpendiculum DC erit ad latus BC in eadem ratione.

 Idem

Idem aliter.

Tab. II. Fig. 11. Cum ſit AB. AC :: BC. DC dico angulum ACB rectum eſſe. Nam ſi negas age CE conſtituentem angulum ECB rectum. Sunt ergo triangula BCE, DBC ſimilia per 8. VI. Elem. adeoque EB. EC :: BC. DC. hoc eſt EB. EC :: AB. AC. Age AF perpendicularem CE & propter parallelas AF, BC, erit EB. EC :: AE. FE :: AB. FC. Ergo per 9. V. Elem. eſt AC = FC, hoc eſt Hypotenuſa trianguli rectanguli æqualis lateri contra 19. I. Elem. Non eſt ergo angulus ECB rectus, & proinde ipſum ACB rectum eſſe oportet. Eſt itaque $ACq+BCq=ABq$. Sed eſt $ACq=AB\times BC$, ergo $AB\times BC+BCq=ABq$, & extracta radice $AB=\frac{1}{2}BC+\sqrt{\frac{5}{4}BCq}$. Quamobrem cape BC. AB :: 1. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, & AC mediam proportionalem inter BC & AB, & triangulo ex his lateribus conſtituto, erunt AB. AC. BC. DC continue proportionales.

PROB. XVI.

Tab. II. Fig. 12. *Super data baſi AB triangulum ABC conſtituere, cujus vertex C erit ad rectum EC poſitione datam, baſis autem medium exiſtet Arithmeticum inter latera.*

Baſis AB biſecetur in F, & producatur donec rectæ EC poſitione datæ occurrat in E, & ad ipſam demittatur perpendicularis CD; dictiſque $AB=a$, $FE=b$, & $BC-AB=x$, erit $BC=a+x$, $AC=a-x$. Et per 13. II. Elem. BD. $\left(=\frac{BCq-ACq+ABq}{2AB}\right)=2x+\frac{1}{2}a$. Adeoque $FD=2x$, $DE=b+2x$, & CD $\left(=\sqrt{CBq-BDq}\right)=\sqrt{\frac{3}{4}aa-3xx}$. Sed propter datas poſitiones rectarum CE & AB, datur angulus CED; adeoque & ratio DE ad CD; quæ ſi ponatur d ad e dabit analogiam $d.\ e :: b+2x.\ \sqrt{\frac{3}{4}aa-3xx}$. Unde, multiplicatis extremis & mediis in ſe, oritur

Digitized by Google

tur æquatio $eb+2ex = d\sqrt{\frac{3}{4}aa-3xx}$, cujus partibus quadratis & rite diſpoſitis, fit $xx = \frac{\frac{3}{4}ddaa-eebb-4eebx}{4ee+3dd}$. Et radice extracta $x = \frac{-2eeb+d\sqrt{3eeaa-3eebb+\frac{9}{4}ddaa}}{4ee+3dd}$. Dato autem x, datur $BC = a+x$ & $AC = a-x$.

PROB. XVII.

Datis Parallelogrammi cujuſcunque lateribus AB, BD, DC & AC, & una linea diagonali BC, invenire alteram diagonalem AD. Tab. II. Fig. 13.

Sit E concurſus diagonalium, & ad diagonalem BC demitte normalem AF, & per 13. II. Elementorum erit $\frac{ACq-ABq+BCq}{2BC} = CF$, atque etiam $\frac{ACq-AEq+ECq}{2EC} = CF$. Quare cum ſit $EC = \frac{1}{2}BC$, & $AE = \frac{1}{2}AD$, erit $\frac{ACq-ABq+BCq}{2BC} = \frac{ACq-\frac{1}{4}ADq+\frac{1}{4}BCq}{BC}$, & facta reductione $AD = \sqrt{2ACq+2ABq-BCq}$.

Unde obiter in quolibet parallelogrammo, ſumma quadratorum laterum æquatur ſummæ quadratorum diagonalium.

PROB. XVIII.

Datis Trapezii ABCD angulis, perimetro, & area, determinare latera. Tab. II. Fig. 14.

Latera duo quælibet AB ac DC produc donec concurrant in E, ſitque $AB = x$ & $BC = y$ & propter angulos omnes datos dantur rationes BC ad CE & BE; quas pone d ad e & f; & erit $CE = \frac{ey}{d}$ & $BE = \frac{fy}{d}$ adeoque $AE = x+\frac{fy}{d}$. Dantur etiam ratio-

rationes AE ad AD ac DE; quas pone g & h ad d; & erit AD $= \frac{dx+fy}{g}$ & ED $= \frac{dx+fy}{h}$, adeoque CD $= \frac{dx+fy}{h} - \frac{ey}{d}$, & ſumma omnium laterum $x+y+\frac{dx+fy}{g}+\frac{dx+fy}{h}-\frac{ey}{d}$; quæ, cum detur, eſto a, & abbrevientur etiam termini ſcribendo $\frac{p}{r}$ pro dato $1+\frac{d}{g}+\frac{d}{h}$, & $\frac{q}{r}$ pro dato $1+\frac{f}{g}+\frac{f}{h}-\frac{e}{d}$, habebitur æquatio $\frac{px+qy}{r}=a$.

Adhæc propter datos omnes angulos datur ratio BCq ad triangulum BCE, quam pone m ad n & erit triang. BCE $= \frac{n}{m}yy$. Datur etiam ratio AEq ad triangulum ADE; quam pone m ad d; & erit triang. ADE $= \frac{ddxx+2dfxy+ffyy}{dm}$. Quare cum area AC, quæ eſt horum triangulorum differentia, detur, eſto bb & erit $\frac{ddxx+2dfxy+ffyy-dnyy}{dm}=bb$. Atque ita habentur duæ æquationes ex quarum reductione omnia determinantur. Nempe ſuperior æquatio dat $\frac{ra-qy}{p}=x$, ſcribendo $\frac{ra-qy}{p}$ pro x in inferiori, provenit $\frac{drraa-2dqray+dqqyy}{ppm}+\frac{2afry-2fqyy}{pm}+\frac{ffyy-dnyy}{dm}=bb$. Et abbreviatis terminis ſcribendo s pro dato $\frac{dqq}{pp}-\frac{2fq}{p}-\frac{ff}{d}-n$, & st pro dato $+\frac{adqr}{pp}-\frac{afr}{p}$, ac stv pro dato $bbm-\frac{drraa}{pp}$, oritur $yy=2ty+tv$ ſeu $y=t+\sqrt{tt+tv}$.

PROB.

PROB. XIX.

Piſcinam ABCD perambulatorio ABCDEFGH datæ areæ, & ejuſdem ubique latitudinis circundare. TAB. II. Fig. 15.

Eſto perambulatorii latitudo x & ejus area aa. Et à punctis A,B,C,D, ad lineas EF, FG, GH & HE demiſſis perpendicularibus AK,BL,BM,CN,CO,DP,DQ,AI, perambulatorium dividetur in quatuor trapezia IK,LM,NO,PQ & in quatuor parallelogramma AL, BN, CP, DI, latitudinis x, & ejuſdem longitudinis cum lateribus dati trapezii. Sit ergo ſumma laterum $(AB+BC+CD+DA)=b$, & erit ſumma parallelogrammorum $=bx$.

Porro ductis AE, BF, CG, DH; cum ſit $AI=AK$ erit ang. $AEI=$ ang. $AEK=\frac{1}{2}IEK$ ſive $\frac{1}{2}DAB$. Datur ergo ang. AEI & proinde ratio ipſius AI ad IE, quam pone d ad e; & erit $IE=\frac{ex}{d}$. Hanc duc in $\frac{1}{2}AI$ ſive $\frac{1}{2}x$ & fiet area trianguli AEI $=\frac{exx}{2d}$. Sed propter æquales angulos & latera, triangula AEI & AEK ſunt æqualia, adeoque trapezium IK ($=2$ triang. AEI) $=\frac{exx}{d}$. Simili modo ponendo $BL.\ LF::d.f$, & $CN.NG::d.g$, & $DP.\ PH::d.h$, (nam illæ etiam rationes dantur ex datis angulis B,C,ac D) habebitur trapezium $LM=\frac{fxx}{d}$, $NO=\frac{gxx}{d}$, & $PQ=\frac{hxx}{d}$. Quamobrem $\frac{exx}{d}+\frac{fxx}{d}+\frac{gxx}{d}+\frac{hxx}{d}$ ſive $\frac{pxx}{d}$ ſcribendo p pro $e+f+g+h$, erit æquale trapeziis quatuor $IK+LM+NO+PQ$; & proinde $\frac{pxx}{d}+bx$, æquabitur toti perambulatorio aa. Quæ æquatio dividendo omnes terminos per $\frac{p}{d}$ & extra-

hendo radicem ejus, evadet $x = \frac{-db + \sqrt{bbdd + 4aapd}}{2p}$. Latitudine Perambulatorii ſic inventa facile eſt ipſum deſcribere.

PROB. XX.

TAB. III. Fig. 1.

A dato puncto C rectam lineam CF ducere quæ cum aliis duabus poſitione datis rectis AE & AF triangulum datæ magnitudinis AEF comprehendet.

Age CD parallelam AE, & CB ac EG perpendiculares in AF, ſitque $AD = a$, $CB = b$, $AF = x$, & trianguli AEF area cc, & propter proportionales DF. AF (:: DC. AE) :: CB. EG, hoc eſt $a + x . x :: b . \frac{bx}{a+x}$ erit $\frac{bx}{a+x} = EG$. Hanc duc in $\frac{1}{2}AF$, & emerget $\frac{bxx}{2a+2x}$ quantitas areæ AEF quæ proinde æquatur cc. Atque adeo æquatione ordinata eſt $xx = \frac{2ccx + 2cca}{b}$ ſeu $x = \frac{cc + \sqrt{c[illegible] + [illegible]}}{b}$.

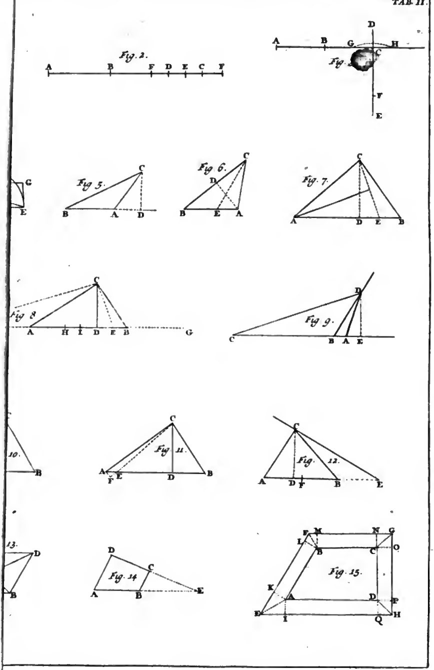
Nihil ſecus recta per datum punctum ducitur quæ triangulum vel trapezium quodvis in data ratione ſecabit.

PROB. XXI.

TAB. III. Fig. 2. vide prop. 45.

Punctum C in data recta linea DF determinare, à quo ad alia duo poſitione data puncta A & B ductæ rectæ AC & BC datam habeant differentiam.

A datis punctis ad datam rectam demitte perpendiculares AD & BF, & dic $AD = a$, $BF = b$, $DF = c$, $DC = x$, & erit $AC = \sqrt{aa + xx}$, $FC = x - c$, & $BC = \sqrt{bb + xx - 2cx + cc}$. Sit



Digitized by Google

Digitized by Google

Sit jam data harum differentia d, exiſtente AC majori quam BC erit $\sqrt{aa+xx}-d=\sqrt{bb+xx-2cx+cc}$. Et quadratis partibus $aa+xx+dd-2d\sqrt{aa+xx}=bb+xx-2cx+cc$. Factaque reductione & abbreviandi cauſa pro datis $aa+dd-bb-cc$ ſcripto $2ee$, emerget $ee+cx=d\sqrt{aa+xx}$. Iterumque quadratis partibus $e^4+2ceex+ccxx=ddaa+ddxx$.

Et æquatione reducta $xx=\frac{2eecx+e^4-aadd}{dd-cc}$, ſeu

$$x=\frac{eec+\sqrt{e^4dd-aad^4+aaddcc}}{dd-cc}.$$

Haud ſecus problema reſolvitur ſi linearum AC & BC ſumma, vel quadratorum ſumma aut differentia, vel proportio, vel rectangulum, vel angulus ab ipſis comprehenſus, detur; vel etiam ſi vice rectæ DC, circumferentia circuli, aut alia quævis curva linea adhibeatur, modo calculus (in hoc ultimo præſertim caſu) referatur ad lineam conjungentem puncta A & B.

PROB. XXII.

Datis poſitione tribus rectis AD, AE, BF, quartam DF ducere, cujus partes DE EF prioribus interceptæ, datarum erunt longitudinum. TAB. III. Fig. 3.

Ad BF demitte perpendicularem EG, ut & obliquam EC parallelam AD, & rectis tribus poſitione datis concurrentibus in A, B, & H, dic $AB=a$, $BH=b$, $AH=c$, $ED=d$, $EF=e$, & $HE=x$. Jam propter ſimilia triangula ABH, ECH, eſt AH. AB::HE. $EC=\frac{ax}{c}$, & AH. HB::HE. $CH=\frac{bx}{c}$. Adde HB, & fit $CB=\frac{bx+bc}{c}$. Inſuper propter ſimilia triangula FEC, FDB, eſt ED. CB::EF. $CF=\frac{ebx+ebc}{dc}$. Denique

que per 12 & 13. II.Elem. eſt $\frac{ECq - EFq}{2FC} + \frac{1}{2}FC (= CG) = \frac{HEq - ECq}{2CH}$ $- \frac{1}{2}CH$, hoc eſt $\frac{\frac{aaxx}{cc} - ee}{\frac{2ebx + 2ebc}{dc}} + \frac{ebx + ebc}{2dc} = \frac{xx - \frac{aaxx}{cc}}{\frac{2bx}{c}} - \frac{bx}{2c}$. Sive $\frac{aadxx - eedcc}{ebx + ebc} + \frac{ebx}{d} + \frac{ebc}{d} = \frac{ccx - aax - bbx}{b}$. Hic, abbreviandi cauſa, pro $\frac{cc - aa - bb}{b} - \frac{eb}{d}$, ſcribe m; & erit $\frac{aadxx - eedcc}{ebx + ebc}$ $+ \frac{ebc}{d} = mx$, ac terminis omnibus multiplicatis per $x + c$, fiet $\frac{aadxx - eedcc}{eb} + \frac{ebcx}{d} + \frac{ebcc}{d} = mxx + mcx$. Iterum pro $\frac{aad}{eb} - m$, ſcribe p, pro $mc - \frac{ebc}{d}$ ſcribe $2pq$, & pro $- \frac{ebcc}{d} + \frac{eedcc}{eb}$ ſcribe prr, & evadet $xx = 2qx + rr$, & $x = q \pm \sqrt{qq + rr}$. Invento x ſive HE, age EC parallelam AB, & cape FC. BC :: $e.d$, & acta FED conditionibus quæſtionis ſatisfaciet.

PROB. XXIII.

TAB. III. Fig. 4.

Punctum Z determinare à quo ad quatuor poſitione datas rectas lineas FA, EB, FC, GD, ſi aliæ quatuor lineæ ZA, ZB, ZC, & ZD in datis angulis ducantur, duarum è ductis ZA & ZB rectangulum & aliarum duarum ZC & ZD ſumma detur.

E lineis elige aliquam poſitione datam FA ut & poſitione non datam ZA quæ ad illam ducitur, ex quarum longitudinibus punctum Z determinetur, & cæteras poſitione datas lineas produc donec his, ſi opus eſt etiam productis, occurrant, ut vides. Dictiſque

que EA $= x$, & AZ $= y$, propter angulos trianguli AEH datos dabitur ratio AE ad AH quam pone p ad q, & erit AH $= \frac{qx}{p}$. Adde AZ, ſitque ZH $= y + \frac{qx}{p}$. Et inde cum propter datos angulos trianguli HZB detur ratio HZ ad BZ ſi ea ponatur n ad p habebitur ZB $= \frac{py+qx}{n}$.

Præterea ſi data EF dicatur a, erit AF $= a - x$, indeque, ſi propter datos angulos trianguli AFI ſtatuatur AF ad AI in ratione p ad r, evadet AI $= \frac{ra-rx}{p}$. Hanc aufer ab AZ & reſtabit IZ $= y - \frac{ra-rx}{p}$. Et propter datos angulos trianguli ICZ, ſi ponatur IZ ad ZC in ratione m ad p, evadet ZC $= \frac{py-ra+rx}{m}$.

Ad eundem modum ſi ponatur EG $= b$. AG. AK $:: l:s$ & ZK. ZD $::.\ p.\ l.$ obtinebitur ZD $= \frac{sb-sx-ly}{p}$.

Jam ex ſtatu quæſtionis ſi duarum ZC & ZD ſumma $\frac{py-ra+rx}{m} + \frac{sb-sx-ly}{p}$ ponatur æqualis dato alicui f; & aliarum duarum rectangulum $\frac{pyy+qxy}{n}$ æquale gg, habebuntur duæ æquationes pro determinandis x & y. Per poſteriorem fit $x = \frac{ngg-pyy}{qy}$. & hunc ipſius x valorem ſcribendo pro eo in priori æquatione, evadet $\frac{py-ra}{m} + \frac{rngg-rpyy}{mqy} + \frac{sb-ly}{p} - \frac{sngg-spyy}{pqy} = f$. Et reducendo $yy = \frac{apqry-bmqsy+fmpqy+ggmns-ggnpr}{ppq-ppr-mlq+mps}$. Et abbrevi. cauſa ſcripto $2b$ pro $\frac{apqr-bmqs+fmpq}{ppq-ppr-mlq+mps}$, & kk pro

pro $\frac{ggmns - ggpnr}{ppq - ppr - mlq + mps}$ fiet $yy = 2by + kk$, ſive $y = b \pm \sqrt{bb + kk}$. Cujus æquationis ope cum y innoteſcit, æquatio $\frac{ngg - pyy}{qy} = x$ dabit x. Quod ſufficit ad determinandum punctum z.

Ad eundem fere modum punctum determinatur à quo ad plures vel pauciores poſitione datas rectas totidem aliæ rectæ ducantur ea lege ut aliquarum ſumma vel differentia vel contentum detur, aut æquetur cæterarum ſummæ vel differentiæ vel contento, vel ut alias quaſlibet habeant aſſignatas conditiones.

PROB. XXIV.

TAB. III. Fig. 5.

Angulum rectum EAF data recta EF ſubtendere, quæ tranſibit per datum punctum C, a lineis rectum angulum comprehendentibus æquidiſtans.

Quadratum ABCD compleatur, & linea EF biſcetur in G. Tum dic CB vel CD eſſe a, EG vel FG eſſe b, & CG eſſe x; eritque CE $= x - b$, & CF $= x + b$. Dein cum CFq − BCq = BFq, erit BF $= \sqrt{xx + 2bx + bb - aa}$. Denique propter ſimilia triangula CDE, FBC, eſt CE. CD :: CF. BF, ſive $x - b.\ a :: x + b.\ \sqrt{xx + 2bx + bb - aa}$. Unde $ax + ab = \overline{x - b} \times \sqrt{xx + 2bx + bb - aa}$. Cujus æquationis utraque parte quadrata, & prodeuntibus terminis in ordinem redactis, prodit $x^4 = \begin{matrix} 2aa \\ +2bb \end{matrix}\ xx \begin{matrix} +2aabb \\ -\ b^4 \end{matrix}$. Et extracta radice ſicut fit in æquationibus quadraticis, prodit $xx = aa + bb + \sqrt{a^4 + 4aabb}$. Adeoque $x = \sqrt{aa + bb + \sqrt{a^4 + 4aabb}}$. CG ſic inventa dat CE vel CF, quæ determinando punctum E vel F problemati ſatisfacit.

Idem

Idem aliter.

Sit CE $=x$, CD $=a$, & EF $=b$, eritque CF $=x+b$ & BF $=\sqrt{xx+2bx+bb-aa}$. Et proinde cum ſit CE.CD::CF.BF, ſive $x.a::x+b.\sqrt{xx+2bx+bb-aa}$, erit $ax+ab=x\sqrt{xx+2bx+bb-aa}$. Hujus æquationis partibus quadratis, & terminis in ordinem redactis prodibit $x^4+2bx^3 \begin{matrix}+bb\\-2aa\end{matrix} xx-2aabx-aabb=0$, æquatio biquadratica, cujus radicis inveſtigatio difficilior eſt quam in priori caſu. Sic autem inveſtigari poteſt. Pone $x^4+2bx^3 \begin{matrix}+bb\\-2aa\end{matrix} xx-2aabx+a^4=aabb+a^4$, & extracta utrobique radice $xx+bx-aa=\pm a\sqrt{aa+bb}$.

Ex his occaſionem nactus ſum tradendi *Regulam de electione terminorum* ad ineundum calculum.

Scilicet cum duorum terminorum talis obvenit affinitas ſive ſimilitudo relationis ad cæteros terminos quæſtionis, ut oporteret æquationes per omnia ſimiles ex utrovis adhibito produci, aut ambos ſi ſimul adhiberentur eaſdem in æquatione finali dimenſiones & eandem omnino formam (ſignis forte + & − exceptis) habituros eſſe; (id quod facile proſpicitur;) tunc neutrum adhibere convenit, ſed eorum vice tertium quemvis eligere qui ſimilem utrique relationem gerit, puta ſemiſummam vel ſemidifferentiam, vel medium proportionale forſan, aut quamvis aliam quantitatem utrique indifferenter & ſine compare relatam.

Sic in præcedente problemate cum viderim lineam EF pariter ad utramque AB & AD referri (quod patebit ſi ducas itidem EF in angulo BAH,) atque adeo nulla ratione ſuaderi poſſem cur ED potius quam BF, vel AE potius, quam AF vel CE potius quam CF pro quærenda quantitate adhiberentur; vice punctorum E & F unde hæc ambiguitas proficiſcitur, ſumpſi (in ſolutione priori) intermedium G quod parem relationem ad utramque linearum AB & AD obſervat. Deinde ab hoc G non demiſi perpendiculum ad AF pro quærenda quantitate, quia potui eadem ratione demiſiſſe ad AD. Et eapropter in neutrum CB vel CD demiſi, ſed inſtitui CG

quæ-

quærendum eſſe quod nullum admittit compar; & ſic æquationem biquadraticam obtinui ſine terminis imparibus.

Potui etiam (animadverſo quod punctum G jaceat in peripheria circuli centro A, radio EG deſcripti) demiſiſſe GK perpendiculum in diagonalem AC, & quæſiviſſe AK vel CK, (quippe quæ ſimilem etiam utrique AB & AD relationem gerunt;) atque ita in æquationem quadraticam $yy = -\frac{1}{2}ey + \frac{1}{2}bb$ incidiſſem poſito AK $= y$, AC $= e$, & EG $= b$. Et AK ſic invento erigendum fuiſſet perpendiculum KG præfato circulo occurrens in G, per quod CF tranſiret.

Ad hanc regulam animum advertens, in Prob. 9. & 10. ubi trianguli latera germana BC & AC determinanda erant, quæſivi potius ſemidifferentiam quam alterutrum eorum. Sed regulæ hujus utilitas ex vigeſimo octavo Problemate magis elucefcet.

PROB. XXV.

Tab. III. Fig. 6.

Ad Circulum centro C radio CD deſcriptum ducere Tangentem DB, cujus pars PB, inter rectas poſitione datas AP, AB ſita, ſit datæ longitudinis.

A centro C ad alterutram rectarum poſitione datarum puta AB demitte normalem CE, eamque produc donec Tangenti DB occurrat in H. Ad eandem AB demitte etiam normalem PG; & dictis EA $= a$, EC $= b$, CD $= c$, BP $= d$, & PG $= x$, propter ſimilia triangula PGB, CDH erit GB $(\sqrt{dd - xx})$. PB :: CD. CH $= \frac{cd}{\sqrt{dd - xx}}$. Adde EC; & fiet EH $= b + \frac{cd}{\sqrt{dd - xx}}$. Porro eſt PG. GB :: EH. EB $= \frac{b}{x}\sqrt{dd - xx} + \frac{cd}{x}$. Adhæc propter angulum PAG datum datur ratio PG ad AG, qua poſita e ad f erit AG $= \frac{fx}{e}$. Adde EA & BG, & habebitur denuo EB $= a + \frac{fx}{e}$

+

$+\sqrt{dd-xx}$. Eſt itaque $\frac{cd}{x}+\frac{b}{x}\sqrt{dd-xx}=a+\frac{fx}{e}+\sqrt{dd-xx}$, & per tranſpoſitionem terminorum $a+\frac{fx}{e}-\frac{cd}{x}=\frac{b-x}{x}\sqrt{dd-xx}$. Et partibus æquationis quadratis $aa+\frac{2afx}{e}-\frac{2acd}{x}+\frac{ffxx}{ee}-\frac{2cdf}{e}+\frac{ccdd}{xx}$ $=\frac{bbdd}{xx}-bb-\frac{2bdd}{x}+2bx+dd-xx$. Et per debitam reductionem

$$x^4\,\frac{\begin{array}{l}+2aef\\-2bee\end{array}x^3\begin{array}{l}+aaee\\+bbee\\-ddee\\-2cdef\end{array}xx\begin{array}{l}+2bddee\\-2acdee\end{array}x\begin{array}{l}+ccddee\\-bbddee\end{array}}{ee+ff}=0.$$

PROB. XXVI.

Invenire punctum D à quo tres rectæ DA, DB, DC ad totidem alias poſitione datas rectas AE, BF, CF perpendiculariter demiſſæ; datam inter ſe rationem obtineat. TAB. III. Fig. 7.

E rectis poſitione datis producatur una puta BF, ut & ejus perpendicularis BD donec reliquis AE & CF occurrant; BF quidem in E & F; BD autem in H & G. Jam ſit $EB=x$ & $EF=a$; eritque $BF=a-x$. Cum autem propter datam poſitionem rectarum EF, EA, & FC, anguli E & F, adeoque rationes laterum triangulorum EBH & FBG dentur; ſit EB ad BH ut d ad e; & erit $BH=\frac{ex}{d}$, & EH ($=\sqrt{EBq+BHq}$) $=\sqrt{xx+\frac{eexx}{dd}}$, hoc eſt $=\frac{x}{d}\sqrt{dd+ee}$. Sit etiam BF ad BG ut d ad f; & erit $BG=\frac{fa-fx}{d}$ & FG ($=\sqrt{BFq+BGq}$) $=\sqrt{aa-2ax+xx+\frac{ffaa-2ffax+ffxx}{dd}}$, hoc eſt $=\frac{a-x}{d}$

$\sqrt{dd+ff}$. Prætereà dicatur BD $=y$, & erit HD $=\frac{ex}{d}-y$, & GD $=\frac{fa-fx}{d}-y$, adeoque cum ſit AD. HD (:: EB.EH) :: $d.\ \sqrt{dd+ee}$, & DC. GD (:: BF. FG) :: $d.\ \sqrt{dd+ff}$, erit AD $=\frac{ex-dy}{\sqrt{dd+ee}}$, & DC $=\frac{fa-fx-dy}{\sqrt{dd+ff}}$. Denique ob datas rationes linearum BD, AD, DC, ſit BD. AD :: $\sqrt{dd+ee}.\ b-d$, & erit $\frac{by-dy}{\sqrt{dd+ee}}$ ($=$AD) $=\frac{ex-dy}{\sqrt{dd+ee}}$, ſive $by=ex$. Sit etiam BD.DC :: $\sqrt{dd+ff}.\ k-d$ & erit $\frac{ky-dy}{\sqrt{dd+ff}}$ ($=$DC) $=\frac{fa-fx-dy}{\sqrt{dd+ff}}$, ſive $ky=fa-fx$. Eſt itaque $\frac{ex}{b}$ $(=y)=\frac{fa-fx}{k}$; & per reductionem $\frac{fba}{ek+fb}=x$. Quare cape EB. EF :: $b.\ \frac{ek}{f}+b$, dein BD. EB :: $e.b$, & habebitur punctum quæſitum D.

PROB. XXVII.

TAB. III. Fig. 8.

Invenire punctum D, à quo tres rectæ DA, DB, DC ad data tria puncta A, B, C, ductæ, datam inter ſe rationem obtineant.

E datis tribus punctis junge duo quævis puta A & C; & à tertio B ad lineam conjungentem AC demitte perpendiculum BE, ut & perpendiculum DF à puncto quæſito D dictiſque AE $=a$, AC $=b$, EB $=c$, AF $=x$, & FD $=y$, erit AD$q=xx+yy$. FC $=b-x$. CDq ($=$FC$q+$FDq) $=bb-2bx+xx+yy$. EF $=x-a$, ac BDq ($=$EF$q+$EB$+$FD quad.) $=xx-2ax+aa+cc+2cy+yy$. Jam cum ſit AD ac CD in data ratione, ſit iſta ratio d ad e; & erit CD $=\frac{e}{d}\sqrt{xx+yy}$. Cum etiam ſit AD ad BD in data ratione, ſit

ſit iſta ratio d ad f, & erit $BD = \frac{f}{d}\sqrt{xx+yy}$. Adeoque eſt $\frac{eexx+eeyy}{dd}$ $(=CDq) = bb - 2bx + xx + yy$, & $\frac{ffxx+ffyy}{dd}$ $(=BDq) = xx - 2ax + aa + cc + 2cy + yy$. In quibus ſi, abbreviandi cauſa, pro $\frac{dd-ee}{d}$ ſcribatur p, & q pro $\frac{dd-ff}{d}$, emerget $bb - 2bx + \frac{p}{d}xx + \frac{p}{d}yy = 0$, & $aa + cc - 2ax + 2cy + \frac{q}{d}xx + \frac{q}{d}yy = 0$. Per priorem eſt $\frac{2bqx - bbq}{p} = \frac{q}{d}xx + \frac{q}{d}yy$. Quare in poſteriori pro $\frac{q}{d}xx + \frac{q}{d}yy$ ſcribe $\frac{2bqx - bbq}{p}$, & orietur $\frac{2bqx - bbq}{p} + aa + cc - 2ax + 2cy = 0$. Iterum, abbreviandi cauſa, ſcribe m pro $a - \frac{bq}{p}$, & $2cn$ pro $\frac{bbq}{p} - aa - cc$, & erit $2mx + 2cn = 2cy$; terminiſque per $2c$ diviſis $\frac{mx}{c} + n = y$. Quamobrem in æquatione $bb - 2bx + \frac{p}{d}xx + \frac{p}{d}yy = 0$, pro yy ſcribe quadratum de $\frac{mx}{c} + n$, & habebitur $bb - 2bx + \frac{p}{d}xx + \frac{pmm}{dcc}xx + \frac{2pmn}{dc}x + \frac{pnn}{d} = 0$. Ubi denuo ſi, abbreviandi cauſa, $\frac{b}{r}$ ſcribatur pro $\frac{p}{d} + \frac{pmm}{dcc}$, $\frac{sb}{r}$ pro $b - \frac{pmn}{dc}$, & $\frac{tbb}{r}$ pro $bb + \frac{pnn}{d}$, habebitur $xx = 2sx - tb$. Et extracta radice $x = s \pm \sqrt{ss - tb}$. Invento x æquatio $\frac{mx}{c} + n = y$, dabit y; & ex datis x & y, hoc eſt AF & FD determinatur punctum quæſitum D.

PROB. XXVIII.

TAB. III. Fig. 9. *Rectam DC datæ longitudinis in datam Conicam ſectionem DAC ſic inſcribere ut ea per punctum G poſitione datum tranſeat.*

Sit AF axis Curvæ, & à punctis D, G & C ad hunc demitte normales DH, GE, & CB. Jam, ad determinandam poſitionem rectæ DC, puncti D aut C inventio proponi poteſt; ſed cum hæc ſint germana, & adeo paria ut ad alterutrum determinandum operatio ſimilis evaſura eſſet, ſive quærerem CG, CB, aut AB; ſive compatia DG, DH, aut AH; ea propter de tertio aliquo puncto proſpicio quod utrumque D & C ſimiliter reſpectet, & una determinet. Et hujuſmodi video eſſe punctum F.

Jam ſit $AE=a$, $EG=b$, $DC=c$, $EF=z$; & præterea cum relatio inter AB & BC habeatur in æquatione quam ſuppono pro Conica ſectione determinanda datam eſſe, ſit $AB=x$, & $BC=y$, & erit $FB=x-a+z$. Et propter $GE.EF::CB.FB$ erit iterum $FB=\frac{yz}{b}$. Ergo $x-a+z=\frac{yz}{b}$.

His ita præparatis tolle x per æquationem quæ curvam deſignat. Quemadmodum ſi Curva ſit Parabola per æquationem $rx=yy$ deſignata, ſcribe $\frac{yy}{r}$ pro x; & orietur $\frac{yy}{r}-a+z=\frac{yz}{b}$. Et extracta radice, $y=\frac{rz}{2b}\pm\sqrt{\frac{rrzz}{4bb}+ar-rz}$. Unde patet $\sqrt{\frac{rrzz}{bb}+4ar-4rz}$ eſſe differentiam gemini valoris y, id eſt linearum $+BC$ & $-DH$, adeoque (demiſſo DK in CB normali) valere CK. Eſt autem $FG.GE::DC.CK$, hoc eſt $\sqrt{bb+zz}.b::c.\sqrt{\frac{rrzz}{bb}+4ar-4rz}$. Ducendoque quadrata extremorum & mediorum in invicem, & facta ordinando orietur

$$z^4=\frac{4bbrz^3\begin{matrix}-4abbr\\-bbrr\end{matrix}zz+4b^4rz\begin{matrix}-4ab^4r\\+b^4cc\end{matrix}}{rr},$$

æqua-

æquatio quatuor tantum dimenſionum, quæ ad octo dimenſiones aſcendiſſet ſi quæſiviſſem CG vel CB aut AB.

PROB. XXIX.

Datum angulum per datum numerum multiplicare vel dividere.

In angulo quovis FAG inſcribe lineas AB, BC, CD, DE, *&c.* Ejuſdem cujuſvis longitudinis, & erunt triangula ABC, BCD, CDE, DEF, *&c.* Iſoſcelia; adeoque per 32. I. Elem. erit ang. CBD = ang. A + ACB = 2 ang. A, & ang. DCE = ang. A + ADC = 3 ang. A, & ang. EDF = A + AED = 4 ang. A, & ang. FEG = 5 ang. A, & ſic deinceps. Poſitis jam AB, BC, CD, *&c.* radiis æqualium circulorum, perpendicula BK, CL, DM, *&c.* demiſſa in AC, BD, CE, *&c.* erunt ſinus iſtorum angulorum, & AK, BL, CM, DN, *&c.* ſinus complementorum ad rectum. Vel poſita AB diametro illæ AK, BL, CM, *&c.* erunt chordæ. Sit ergo AB = $2r$ & AK = x, dein ſic operare. Tab. III. Fig. 10.

$$AB \,.\, AK :: AC \,.\, AL.$$

$$2r \,.\, x :: 2x \,.\, \frac{xx}{r}.$$

$$\left.\begin{array}{l} AL - AB \\ \text{Et } \frac{xx}{r} - 2r \end{array}\right\} = BL, \text{ Duplicatio.}$$

$$AB \,.\, AK :: AD\,(2AL - AB) \,.\, AM.$$

$$2r \,.\, x :: \frac{2xx}{r} - 2r \,.\, \frac{x^3}{rr} - x.$$

$$\left.\begin{array}{l} AM - AC \\ \text{Et } \frac{x^3}{rr} - 3x \end{array}\right\} = CM, \text{ Triplicatio.}$$

$$AB \,.\, AK :: AE\,(2AM - AC) \,.\, AN.$$

$$2r \,.\, x :: \frac{2x^3}{rr} - 4x \,.\, \frac{x^4}{r^3} - \frac{2xx}{r}.$$

$$\left.\begin{array}{l} AN - AD \\ \text{Et } \frac{x^4}{r^3} - \frac{4xx}{r} + 2r \end{array}\right\} = DN, \text{ Quadruplicatio.}$$

$$AB.AK::AF(2AN-AD).AO.$$
$$2r.\ x\ ::\frac{2x^4}{r^3}-\frac{6xx}{r}+2r.\ \frac{x^5}{r^4}-\frac{3x^3}{rr}+x.$$
$$\left.\begin{array}{l} AO-AE \\ \text{Et } \frac{x^5}{r^4}-\frac{5x^3}{rr}+5x \end{array}\right\}=EO, \text{ Quintuplicatio.}$$

Et ſic deinceps. Quod ſi velis angulum in aliquot partes dividere, pone q pro BL, CM, DN, &c. Et habebis $xx-2rr=qr$ ad biſectionem, $x^3-3rrx=qrr$ ad triſectionem, $x^4-4rrxx+2r^4=qr^3$ ad quadriſectionem, $x^5-5rrx^3+5r^4x=qr^4$ ad quinquiſectionem &c.

PROB. XXX.

Tab. III. Fig. 11.

Cometæ in linea recta BD uniformiter progredientis poſitionem curſus ex tribus obſervationibus determinare.

Sit A oculus ſpectatoris, B locus Cometæ in prima obſervatione, C in ſecunda ac D in tertia; quærenda erit inclinatio lineæ BD ad lineam AB. Ex obſervationibus itaque dantur anguli BAC BAD; adeoque ſi BH ducatur ad AB normalis & occurrens AC & AD in E & F, ex aſſumto utcunque AB dabuntur BE & BF, tangentes nempe præfatorum angulorum reſpectu radii AB. Sit ergo $AB=a$, $BE=b$, & $BF=c$. Porro ex datis obſervationum intervallis dabitur ratio BC ad BD quæ ſi ponatur b ad e, & agatur DG parallela AC, cum ſit BE ad BG in eadem ratione, & BE dicta fuerit b erit $BG=e$, adeoque $GF=e-c$. Adhæc ſi demittatur DH normalis ad BG, propter triangula ABF & DHF ſimilia & ſimiliter ſecta lineis AE ac DG, erit FE. AB::FG. HD, hoc eſt $c-b.a::e-c.\frac{ae-ac}{c-b}=HD$. Erit etiam FE. FB::FG.FH, hoc eſt $c-b.\ c::e-c.\ \frac{ce-cc}{c-b}=FH$; cui ad-

de

Digitized by Google

de BF ſive c & fit $BH=\frac{ce-cb}{c-b}$. Quare eſt $\frac{ce-cb}{c-b}$ ad $\frac{ae-ac}{c-b}$, (ſive $ce-cb$ ad $ae-ac$, vel $\frac{ce-cb}{e-c}$ ad a) ut BH ad HD; hoc eſt ut tangens anguli HDB ſive ABK ad radium. Quare cum a ſupponatur eſſe radius, erit $\frac{ce-cb}{e-c}$ tangens anguli ABK, adeoque facta reſolutione erit ut $e-c$ ad $e-b$ (ſive GF ad GE) ita c (ſive tangens anguli BAF) ad tangentem anguli ABK.

Dic itaque ut tempus inter primam & ſecundam obſervationem, ad tempus inter primam ac tertiam, ita tangens anguli BAE, ad quartam proportionalem. Dein ut differentia inter illam quartam proportionalem & tangentem anguli BAF, ad differentiam inter eandem quartam proportionalem & tangentem anguli BAE, ita tangens anguli BAF, ad tangentem anguli ABK.

PROB. XXXI.

Radiis a puncto lucido ad ſphæricam ſuperficiem refringentem divergentibus, invenire concurſus ſingulorum refractorum cum axe ſphæræ per punctum illud lucidum tranſeunte.

Sit A punctum illud lucidum, & BV ſphæra, cujus axis AD, Centrum C, & vertex V, ſitque AB radius incidens & BD refractus ejus, ac demiſſis ad radios iſtos perpendicularibus CE & CF, ut & BG perpendiculari ad AD, actaque BC, dic $AC=a$, VC vel $BC=r$, $CG=x$, & $CD=z$, eritque $AG=a-x$, $BG=\sqrt{rr-xx}$, $AB=\sqrt{aa-2ax+rr}$; & propter ſim. tri. ABG & ACE, $CE=\frac{a\sqrt{rr-xx}}{\sqrt{aa-2ax+rr}}$. Item $GD=z+x$, $BD=\sqrt{zz+2zx+rr}$: & propter ſim. tri. DBG ac DCF, $CF=\frac{z\sqrt{rr-xx}}{\sqrt{zz+2zx+rr}}$. Præterea cum ratio ſinuum incidentiæ & TAB. III. Fig. 12.

Digitized by Google

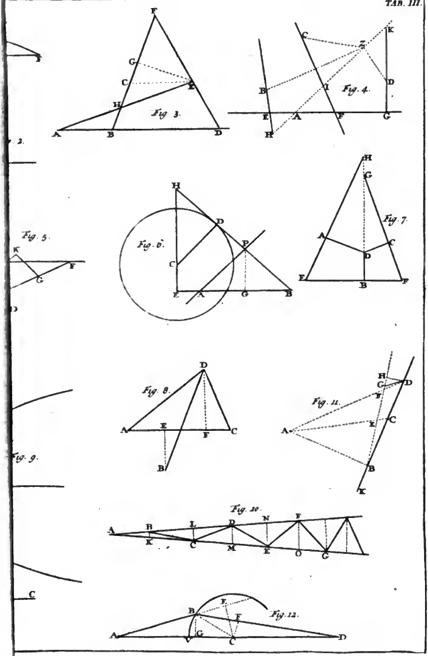
refractionis, adeoque CE ad CF detur, pone illam rationem eſſe a ad f, & erit $\frac{fa\sqrt{rr-xx}}{\sqrt{aa-2ax+rr}} = \frac{az\sqrt{rr-xx}}{\sqrt{zz+2zx+rr}}$, ac multiplicando in crucem, dividendoque per $a\sqrt{rr-xx}$, erit $f\sqrt{zz+2zx+rr} = z\sqrt{aa-2ax+rr}$, & quadrando, ac redigendo terminos in ordinem, $zz = \frac{2ffxz+ffrr}{aa-2ax+rr-ff}$. Denique pro dato $\frac{ff}{a}$ ſcribe p, & q pro dato $a+\frac{rr}{a}-p$, & erit $zz = \frac{2pxz+prr}{q-2x}$ ac $z = \frac{px+\sqrt{ppxx-2prrx+pqrr}}{q-2x}$. Inventum eſt itaque z; hoc eſt longitudo CD, adeoque punctum quæſitum D quo refractus BD concurrit cum axe. Q. E. F.

Poſui hic incidentes radios divergentes eſſe, & in Medium denſius incidere; ſed mutatis mutandis Problema perinde reſolvitur ubi convergunt, vel incidunt è denſiori Medio in rarius.

PROB. XXXII.

Si Conus plano quolibet ſecetur, invenire figuram ſectionis.

TAB. IV. Fig. 1. 2. Sit ABC conus circulari baſi BC inſiſtens; IEM ejus ſectio quæſita; KILM alia quælibet ſectio parallela baſi, & occurrens priori ſectioni in HI; & ABC tertia ſectio perpendiculariter biſecans priores duas in EH & KL, & conum in triangulo ABC. Et producto EH donec occurrat ipſi AK in D, actiſque EF ac DG parallelis KL & occurrentibus AB & AC in F ac G, dic $EF=a$, $DG=b$, $ED=c$, $EH=x$, & $HI=y$; & propter ſim. tri. EHL, EDG, erit ED. DG :: EH. $HL = \frac{bx}{c}$. Dein propter ſim. tri. DEF, DHK, erit DE. EF :: DH. ($c-x$ in Fig. 1, & $c+x$ in Fig. 2.) $HK = \frac{ac \mp ax}{c}$. Denique cum ſectio KIL ſit paral-



Digitized by Google

parallela baſi adeoque circularis, erit $HK \times HL = HIq$, hoc eſt $\frac{ab}{c}x + \frac{-ab}{cc}xx = yy$, æquatio quæ exprimit relationem inter EH (x) & HI (y) hoc eſt inter axem & ordinatim applicatam ſectionis EIM, quæ æquatio cum ſit ad Ellipſin in Fig. 1, & ad Hyperbolam in Fig. 2. patet ſectionem illam perinde Ellipticam vel Hyperbolicam eſſe.

Quod ſi ED nullibi occurrat AK, ipſi parallela exiſtens, tunc erit $HK = EF$ (a), & inde $\frac{ab}{c}x$ ($HK \times HL$) $= yy$, æquatio ad Parabolam.

PROB. XXXIII.

Si recta XY circa axem AB, ad diſtantiam CD, in data inclinatione ad planum DCB convolvatur, & ſolidum PQRVTS iſta convolutione generatum ſecetur plano quolibet INQLK; invenire figuram Sectionis. Tab. IV. Fig. 3.

Eſto BHQ vel GHO inclinatio axis AB ad planum ſectionis; & L quilibet concurſus rectæ XY cum plano illo. Age DF parallelam AB, & ad AB, DF & HO demitte perpendiculares LG, LF, LM, ac junge FG & MG. Dictiſque $CD = a$, $CH = b$, $HM = x$, & $ML = y$; & propter datum angulum GHO poſito $MH.\ HG :: d.e$: erit $\frac{ex}{d} = GH$, & $b + \frac{ex}{d}$ GC vel FD. Adhæc propter angulum datum LDF (nempe inclinationem rectæ XY ad planum GCDF) poſito $FD.\ FL :: g.b$, erit $\frac{bb}{g} + \frac{bex}{dg} = FL$, cujus quadrato adde FGq, (DCq ſeu aa) & emerget $GLq = aa + \frac{bbbb}{gg} + \frac{2bbbex}{dgg} + \frac{bbeexx}{ddgg}$. Hinc aufer MGq ($HMq - HGq$ ſeu $xx - \frac{ee}{dd}xx$) & reſtabit

$$\frac{aagg+bbbb}{gg}+\frac{2bbbe}{dgg}x+\frac{bbee-ddgg+eegg}{ddgg}xx\,(=\mathrm{ML}q)=yy:$$

æquatio quæ exprimit relationem inter x & y, hoc eſt inter HM axem ſectionis, & ML ordinatim applicatam. Et proinde cum in hac æquatione x & y ad duas tantum dimenſiones aſcendant, patet figuram INQLK eſſe conicam ſectionem. Utpote ſi angulus MHG major ſit angulo LDF, Ellipſis erit hæc figura; ſi minor, Hyperbola; ſi æqualis vel Parabola, vel (coincidentibus inſuper punctis C & H) parallelogrammum.

PROB. XXXIV.

TAB. IV. Fig. 4. *Si ad AF erigatur perpendiculum AD datæ longitudinis, & normæ DEF crus unum ED continuo tranſeat per punctum D dum alterum crus EF æquale AD dilabatur ſuper AF; invenire curvam HIC quam crus EF medio ejus puncto C deſcribit.*

Sit EC vel CF $=a$, perpendiculum CB $=y$, AB $=x$, & propter ſimilia triangula FBC, FEG, erit BF $(\sqrt{aa-yy}.)$ BC+CF $(y+a)::$ EF $(2a.)$ EG+GF (AG+GF) ſeu AF. Quare $\frac{2ay+2aa}{\sqrt{aa-yy}}(=\mathrm{AF}=\mathrm{AB}+\mathrm{BF})=x+\sqrt{aa-yy}$. Jam multiplicando per $\sqrt{aa-yy}$ fit $2ay+2aa=aa-yy+x\sqrt{aa-yy}$, ſeu $2ay+aa+yy=x\sqrt{aa-yy}$, & quadrando partes diviſas per $\sqrt{a+y}$, ac ordinando prodit $y^3+3ayy\begin{matrix}+3aa\\+xx\end{matrix}y\begin{matrix}+a^3\\-axx\end{matrix}=0$.

Idem aliter.

TAB. IV. Fig. 5. In BC cape hinc inde BI, & CK æquales CF, & age KF, HI, HC, ac DF; quarum HC ac DF occurrant ipſis AF & IK in M & N, & in HC demitte normalem IL. Eritque angulus K $=\frac{1}{2}$BCF $=\frac{1}{2}$EGF $=$ GFD $=$ AMH $=$ MHI $=$ CIL; adeoque

que triangula rectangula KBF, FBN, HLI & ILC ſimilia. Dic ergo $FC=a$, $HI=x$, & $IC=y$; & erit BN $(2a-y.)$ BK (y)::LC.LH::CI$q\,(yy.)$HI$q\,(xx.)$ adeoque $2axx-yxx=y^3$. Ex qua æquatione facile colligitur hanc curvam eſſe Ciſſoidem Veterum, ad circulum cujus centrum ſit A ac radius AH pertinentem.

PROB. XXXV.

Si datæ longitudinis recta ED angulum datum EAD ſubtendens ita moveatur ut termini ejus D & E anguli iſtius latera AD & AE perpetim contingant; proponatur Curvam FCG determinare quam punctum quodvis C in recta iſta ED datum deſcribit. Tab. IV. Fig. 6.

A dato puncto C age CB parallelam EA; & dic $AB=x$, $BC=y$, $CE=a$ & $CD=b$, & propter ſimilia triangula DCB, DEA erit EC.AB::CD.BD. hoc eſt $a.x::b.BD=\frac{bx}{a}$. Præterea demiſſo perpendiculo CH, propter datum angulum DAE vel DBC, adeoque datam rationem laterum trianguli rectanguli BCH ſit $a.e.$::BC.BH, & erit $BH=\frac{ey}{a}$. Aufer hanc de BD & reſtabit $HD=\frac{bx-ey}{a}$. Jam in triangulo BCH propter angulum rectum BHC eſt $BCq-BHq=CHq$, hoc eſt $yy-\frac{eeyy}{aa}=CHq$. Similiter in triangulo CDH propter angulum CHD rectum, eſt $CDq-CHq=HDq$, hoc eſt $bb-yy+\frac{eeyy}{aa}$ $(=HDq=\frac{bx-ey}{a}$ quadrato$)=\frac{bbxx-2bexy+eeyy}{aa}$. Et per reductionem $yy=\frac{2be}{aa}xy+\frac{aabb-bbxx}{aa}$; Ubi cum in-

cognitæ quantitates ſint duarum tantum dimenſionum, patet curvam eſſe Conicam ſectionem. Præterea extracta radice fit $y = \frac{bex \pm b\sqrt{eexx - aaxx + a^4}}{aa}$. Ubi in termino radicali coëfficiens ipſius xx eſt $ee - aa$. Atqui erat $a.e::$BC.BH; & BC neceſſario major eſt linea quam BH, nempe Hypotenuſa trianguli rectanguli major latere; ergo a major quam e, & $ee - aa$ negativa eſt quantitas, atque adeo curva erit Ellipſis.

PROB. XXXVI.

Tab. IV. Fig. 7.

Si norma EBD ita moveatur ut ejus crus unum EB continuo ſubtendat angulum rectum EAB, dum terminus alterius cruris BD deſcribat curvam aliquam lineam FDG; invenire lineam iſtam FDG quam punctum D deſcribit.

A puncto D ad latus AC demitte perpendiculum DC; & dictis AC $= x$, & DC $= y$, atque EB $= a$ & BD $= b$; in triangulo BDC propter angulum rectum ad C, eſt BCq = BDq − DCq $= bb - yy$. Ergo BC $= \sqrt{bb - yy}$ & AB $= x - \sqrt{bb - yy}$. Præterea propter ſimilia triangula BEA. DBC, eſt BD.DC:: EB.AB. hoc eſt $b.y::a.x - \sqrt{bb - yy}$. Quare $bx - b\sqrt{bb - yy} = ay$, ſive $bx - ay = b\sqrt{bb - yy}$. Et partibus quadratis ac debite reductis $yy = \frac{2abxy + b^4 - bbxx}{aa + bb}$. Et extracta radice $y = \frac{abx \pm bb\sqrt{aa + bb - xx}}{aa + bb}$. Unde patet iterum Curvam eſſe Ellipſin.

Tab. IV. Fig. 8.

Hæc ita ſe habent ubi anguli EBD & EAB recti ſunt: Sed ſi anguli iſti ſunt alterius cujuſvis magnitudinis, dummodo ſint æquales, ſic procedendum erit. Demittatur DC perpendicularis ad AC ut ante, & agatur DH conſtituens angulum DHA æqualem angulo HAE puta obtuſum, dictiſque EB $= a$, BD $= b$, AH $= x$, & HD $= y$, propter ſimilia triangula EAB, BHD, erit BD.

DH

DH::EB.AB. hoc eſt $b.y::a.AB = \frac{ay}{b}$. Aufer hanc de AH, & reſtabit $BH = x - \frac{ay}{b}$. Præterea in triangulo DHC propter omnes angulos datos, adeoque datam rationem laterum, aſſume DH ad HC in ratione quavis data, puta b ad e, & cum DH fit y, erit $HC \frac{ey}{b}$, & $HB \times HC = \frac{exy}{b} - \frac{aeyy}{bb}$. Denique per 12. II. Elem. in triangulo BHD eſt $BDq = BHq + DHq + 2BH \times HC$, hoc eſt $bb = xx - \frac{2axy}{b} + \frac{aayy}{bb} + yy + \frac{2exy}{b} - \frac{2aeyy}{bb}$. Et extracta radice $x = \frac{ay - ey \pm \sqrt{eeyy - bbyy + bbbb}}{b}$. Ubi cum b ſit major e hoc eſt $ee - bb$ negativa quantitas, patet iterum curvam eſſe Ellipſin.

PROB. XXXVII.

In dato angulo PAB actis utcunque rectis BD, PD in data ratione hac ſemper lege, ut BD ſit parallela AP, & PD terminetur ad punctum P in recta AP datum; invenire locum puncti D. TAB. IV. Fig. 9.

Age CD parallelam AB & DE perpendicularem AP; ac dic $AP = a$, $CP = x$, & $CD = y$, ſitque BD ad PD in ratione d ad e, & erit AC vel $BD = a - x$, & $PD = \frac{ea - ex}{d}$. Sit inſuper propter datum angulum DCE, ratio CD ad CE, d ad f, & erit $CE = \frac{fy}{d}$, & $EP = x - \frac{fy}{d}$. Atqui propter angulos ad E rectos eſt $CDq - CEq (= EDq) = PDq - EPq$, hoc

hoc eſt $yy - \frac{ffyy}{dd} = \frac{eeaa - 2eeax + eexx}{dd} - xx + \frac{2fxy}{d} - \frac{ffyy}{dd}$. Ac deletis utrobique $-\frac{ffyy}{dd}$, terminiſque rite diſpoſitis $yy = \frac{2fxy}{d} + \frac{eeaa - 2eeax + eexx - ddxx}{dd}$. Et extracta radice $y = \frac{fx}{d} \pm \frac{\sqrt{eeaa - 2eeax \begin{smallmatrix} +ee \\ -dd \\ +ff \end{smallmatrix} xx}}{d}$. Ubi cum x & y in æquatione penultima non niſi ad duas dimenſiones aſcendant, locus puncti D erit Conica ſectio, eaque Hyperbola Parabola vel Ellipſis prout $ee - dd + ff$, (coëfficiens ipſius xx in æquatione poſteriori,) ſit majus, æquale, vel minus nihilo.

PROB. XXXVIII.

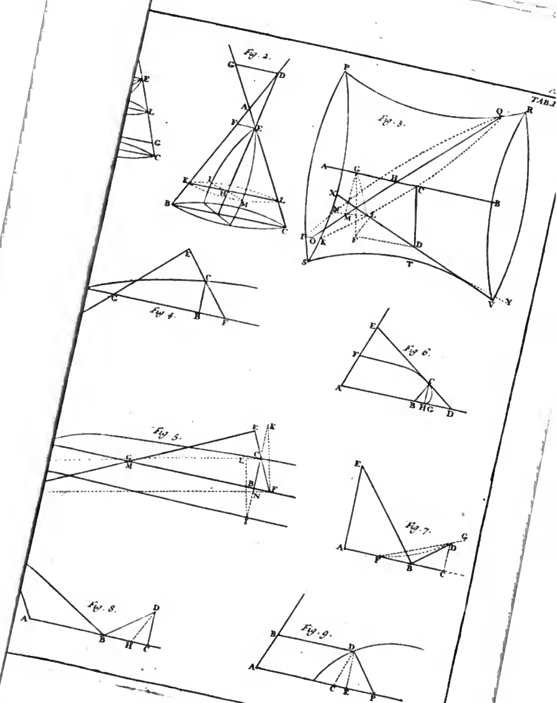
Tab. V. Fig. 1.

Rectis duabus VE & VC poſitione datis, & ab alia recta PE circa polum poſitione datum P vertente ſectis utcunque in C & E; ſi recta intercepta CE dividatur in partes CD, DE rationem datam habentes, proponatur invenire locum puncti D.

Age VP, eique parallelas DA, EB occurrentes VC in A & B. Dic $VP = a$, $VA = x$, & $AD = y$, & cum detur ratio CD ad DE, vel converſe ratio CD ad CE, hoc eſt ratio DA ad EB, ſit iſta ratio d ad e, & erit $EB = \frac{ey}{d}$. Præterea cum detur angulus EVB, adeoque ratio EB ad VB, ſit iſta ratio e ad f; & erit $VB = \frac{fy}{d}$. Denique propter ſimilia triangula CEB, CDA, CPV, eſt EB . CB :: DA . CA :: VP . VC, & componendo EB + VP . CB + VC :: DA + VP . CA + VC. Hoc eſt

ey

Digitized by Google



Digitized by Google

$\frac{ey}{d}+a.\frac{fy}{d}::y+a.x$. Ductiſque extremis & mediis in ſe $eyx+dax=fyy+fay$. Ubi cum indefinitæ quantitates x & y non niſi ad duas dimenſiones aſcendant, ſequitur curvam VD, in qua punctum D perpetim reperitur, eſſe conicam ſectionem, eamque Hyperbolam; quia una ex indefinitis quantitatibus, nempe x eſt unius tantum dimenſionis, & in termino exy multiplicatur per alteram indefinitam quantitatem y.

PROB. XXXIX.

Si rectæ duæ AC, BC à duobus poſitione datis punctis A & B in data quavis ratione ad tertium quodvis punctum C ducantur; invenire locum puncti concurſus C. Tab. V. Fig. 2.

Junge AB; & ad hanc demitte normalem CD: dictiſque $AB=a$, $AD=x$, $DC=y$: Erit $AC=\sqrt{xx+yy}$. $BD=a-x$ & BC $(=\sqrt{BDq+DCq})=\sqrt{xx-2ax+aa+yy}$. Jam cum detur ratio AC ad BC, ſit iſta d ad e; &, extremis & mediis in ſe ductis, erit $e\sqrt{xx+yy}=d\sqrt{xx-2ax+aa+yy}$. Et per reductionem $\sqrt{\frac{ddaa-2ddax}{ee-dd}-xx}=y$. Ubi cum xx ſit negativum, & ſola unitate affectum; atque etiam angulus ADC rectus, patet curvam in qua punctum C locatur eſſe circulum. Nempe in recta AB cape puncta E & F ita ut ſint $d.e::AE.BE::AF.BF$, & erit EF circuli hujus diameter.

Et hinc è converſo patet hoc Theorema, quod in circuli cujuſvis diametro EF infinite producta datis utcunque duobus punctis A & B hac lege ut ſit AE.AF::BE.BF, & à punctis hiſce actis duabus rectis AC, BC concurrentibus ad circulum in puncto quovis C: erit AC ad BC in data ratione AE ad BE.

PROB. XL.

TAB. V. Fig. 3. *Si punctum lucidum A radios verſus refringentem ſuperficiem planam CD ejiciat; invenire radium AC, cujus refractus CB impinget in datum punctum B.*

A puncto iſto lucido ad refringens planum demitte perpendiculum AD, & cum eo utrinque producto concurrat refractus radius BC in E, & perpendiculum à puncto B demiſſum in F, & agatur BD; dictiſque $AD=a$, $DB=b$, $BF=c$, $DC=x$, ſtatue rationem ſinuum incidentiæ & refractionis, hoc eſt ſinuum angulorum CAD, CED eſſe d ad e, & cum EC & AC (ut notum eſt) ſint in eadem ratione, & AC ſit $\sqrt{aa+xx}$ erit $EC=\frac{d}{e}\sqrt{aa+xx}$.

Præterea eſt ED $\left(=\sqrt{ECq-CDq}\right)=\sqrt{\frac{ddaa+ddxx}{ee}-xx}$, & $DF=\sqrt{bb-cc}$, atque $EF=\sqrt{bb-cc}+\sqrt{\frac{ddaa+ddxx}{ee}-xx}$. Denique propter ſimilia triangula ECD, EBF, eſt ED.DC:: EF.FB, &, ductis extremorum & mediorum valoribus in ſe, $c\sqrt{\frac{ddaa+ddxx}{ee}-xx}=x\sqrt{bb-cc}+x\sqrt{\frac{ddaa+ddxx}{ee}-xx}$, ſive $\overline{c-x}\sqrt{\frac{ddaa+ddxx}{ee}-xx}=x\sqrt{bb-cc}$. Et partibus æquationis quadratis & ritè diſpoſitis $x^4-2cx^3+\frac{\begin{array}{l}ddcc\\+ddaaxx-2ddaacx+ddaacc\\-eebb\end{array}}{dd-ee}=0$.

PROB.

PROB. XLI.

Invenire locum verticis trianguli D, cujus baſis AB datur, & anguli ad baſem DAB, DBA datam habent differentiam. TAB. V. Fig. 4.

Ubi angulus ad Verticem, ſive (quod perinde eſt) ubi ſumma angulorum ad baſem datur, docuit Euclides locum verticis eſſe circumferentiam circuli; propoſuimus igitur inventionem loci ubi differentia angulorum ad baſem datur. Sit angulus DBA major angulo DAB, ſitque ABF eorum data differentia, recta BF occurrente AD in F. Inſuper ad BF demittatur normalis DE, ut & ad AB normalis DC, occurrens BF in G. Dictiſque $AB = a$, $AC = x$, & $CD = y$, erit $BC = a - x$. Jam in triangulo BCG cum dentur omnes anguli dabitur ratio laterum BC & GC; ſit iſta d ad a, & erit $CG = \frac{aa - ax}{d}$. Aufer hanc de DC ſive y & reſtabit $DG = \frac{dy - aa + ax}{d}$. Præterea propter ſimilia triangula BGC, DGE eſt BG.BC::DG.DE. Eſt autem in triangulo BGC, $a.d::CG.BC$. Adeoque $aa.dd::CGq.BCq$, & componendo $aa+dd.dd::BGq.BCq$. Et extractis radicibus $\sqrt{aa+dd}.d(::BG.BC)::DG.DE$. Ergo $DE = \frac{dy - aa + ax}{\sqrt{aa+dd}}$. III. 29. Euclid.

Adhæc cum angulus ABF ſit differentia angulorum BAD & ABD, adeoque anguli BAD & FBD æquentur, ſimilia erunt triangula rectangula CAD & EBD, & proinde latera proportionalia $DA.DC::DB.DE$. Sed eſt $DC = y$. $DA (= \sqrt{ACq + DCq}) = \sqrt{xx+yy}$. $DB (= \sqrt{BCq + DCq}) = \sqrt{aa - 2ax + xx + yy}$, & ſupra erat $DE = \frac{dy - aa + ax}{\sqrt{aa+dd}}$. Quare eſt $\sqrt{xx+yy}.y::\sqrt{aa-2ax+xx+yy}.\frac{dy-aa+ax}{\sqrt{aa+dd}}$. Et extremorum & mediorum quadratis in ſe

 ductis

ductis $aayy - 2axyy + xxyy + y^4 = \frac{ddxxyy + ddy^4}{aa+dd}$ $\frac{-2aadxxy - 2aady^3 + 2adyx^3 + 2adxy^3 + a^4xx}{aa+dd}$ $\frac{+a^4yy - 2a^3x^3 - 2a^3xyy - 2ax^4 + aaxxyy}{aa+dd}$.

Duc omnes terminos in $aa+dd$, & prodeuntes redige in debitum ordinem, & orietur $x^4 \begin{matrix} -2a \\ +\frac{2d}{a}y \end{matrix} x^3 \begin{matrix} -2dy \\ +aa \end{matrix} xx \begin{matrix} +\frac{2d}{a}y^3 \\ +\frac{2dd}{a}yy \end{matrix} \begin{matrix} -ddyy \\ x - 2dy^3 = 0. \\ -y^4 \end{matrix}$

Divide hanc æquationem per $xx - ax \begin{matrix} +dy \\ +yy \end{matrix}$, & orietur $xx \begin{matrix} -a \\ +\frac{2d}{a}y \end{matrix} x \begin{matrix} -yy \\ -dy \end{matrix} = 0$. Duæ itaque prodierunt æquationes in ſolutione hujus Problematis. Prior $xx - ax \begin{matrix} +dy \\ +yy \end{matrix} = 0$ eſt ad circulum, locum nempe puncti D ubi angulus FBD ſumitur ad alias partes rectæ BF quam in figura deſcribitur, exiſtente angulo ABF ſumma angulorum DAB DBA ad baſem, adeoque angulo ADB ad verticem dato. Poſterior $xx \begin{matrix} -a \\ +\frac{2d}{a}y \end{matrix} x \begin{matrix} -yy \\ -dy \end{matrix} = 0$ eſt ad Hyperbolam, locum puncti D ubi angulus FBD ſitum obtinet à recta BF quem in Figura deſcripſimus: hoc eſt ita ut angulus ABF ſit differentia angulorum DAB, DBA ad baſem. Hyperbolæ autem hæc eſt determinatio. Biſeca AB in P. Age PQ conſtituentem angulum BPQ æqualem dimidio anguli ABF. Huic erige normalem PR, & erunt PQ, PR Aſſymptoti hujus Hyperbolæ, & B punctum per quod Hyperbola tranſibit.

Et hinc prodit tale Theorema. Hyperbolæ rectangulæ diametro quavis AB ducta, & à terminis ejus ad Hyperbolæ puncta duo quævis D & H ductis rectis AD, BD, AH, BH; hæ rectæ angulos DAH, DBH ad terminos diametri conſtituent æquales.

Idem

Idem brevius.

Ad Prob. XXIV. *Regulam* de commoda terminorum ad ineundum calculum electione tradidi; ubi obvenit ambiguitas in electione. Hic differentia angulorum ad baſem eodem modo ſe habet ad utrumque angulum; & in conſtructione Schematis æque potuit addi ad angulum minorem DAB, ducendo ab A rectam ipſi BF parallelam, ac ſubtrahi ab angulo majori DBA ducendo rectam BF. Quamobrem nec addo nec ſubtraho, ſed dimidium ejus uni angulorum addo, alteri ſubtraho. Deinde cum etiam ambiguum ſit utrum AC vel BC pro termino indefinito cui ordinatim applicata DC inſiſtit adhibeatur, neutrum adhibeo; ſed biſeco AB in P, & adhibeo PC: vel potius acta MPQ conſtituente hinc inde angulos APQ, BPM æquales dimidio differentiæ angulorum ad baſem, ita ut ea cum rectis AD, BD conſtituat angulos DQP, DMP æquales; ad MQ demitto normales AR, BN, DO & adhibeo DO pro ordinatim applicata, ac PO pro indefinita linea cui inſiſtit. Voco itaque $PO = x$, $DO = y$, AR vel $BN = b$, & PR vel $PN = c$. Et propter ſimilia triangula BNM, DOM, erit BN.DO::MN.MO. Et dividendo, DO−BN $(y-b)$.DO (y)::MO−MN (ON ſive $c-x$).MO. Quare $MO = \frac{cy-xy}{y-b}$. Tab. V. Fig. 5.

Similiter ex altera parte propter ſimilia triangula ARQ, DOQ, erit AR.DO::RQ.QO: & componendo DO+AR $(y+b)$. DO (y)::QO+RQ (OR ſive $c+x$).QO. Quare $QO = \frac{cy+xy}{y+b}$. Denique propter æquales angulos DMQ, DQM æquantur MO & QO, hoc eſt $\frac{cy-xy}{y-b} = \frac{cy+xy}{y+b}$. Divide omnia per y, & multiplica per denominatores, & orietur $cy+cb-xy-xb = cy-cb+xy-xb$, ſive $cb = xy$, notiſſima æquatio ad Hyperbolam.

Quin etiam locus puncti D ſine calculo Algebraico prodire potuit. Eſt enim ex ſuperioribus DO−BN.ON::DO.MO(QO)::

 DO

DO+AR.OR. Hoc eſt DO−BN.DO+BN::ON.OR, & mixtim DO.BN:: $\frac{ON+OR}{2}$ (NP). $\frac{OR-ON}{2}$ (OP). Adeoque DO×OP=BN×NP.

PROB. XLII.

Locum verticis trianguli invenire cujus Baſis datur, & angulorum ad baſem unus dato angulo differt à duplo alterius.

TAB. V. Fig. 5. In Schemate noviſſimo ſuperioris Problematis ſit ABD triangulum illud, AB baſis biſecta in P, APQ vel BPM triens anguli dati, quo angulus DBA excedit duplum anguli DAB: & angulus DMQ erit duplus anguli DQM. Ad MQ demitte perpendicula AR, BN, DO; & angulum DMQ biſeca recta MS occurrente DO in S; & erunt triangula DOQ, SOM ſimilia; adeoque OQ.OM::OD.OS, & dividendo OQ−OM.OM::SD.OS:: (per 3. VI. Elem.) DM.OM Quare (per 9. V. Elem.) OQ−OM=DM. Dictis jam PO=x, OD=y, AR vel BN=b, & PR vel PN=c, erit ut in ſuperiori Problemate OM=$\frac{cy-xy}{y-b}$, & OQ=$\frac{cy+xy}{y+b}$, adeoque OQ−OM =$\frac{-2bcy+2xyy}{yy-bb}$. Pone jam DOq+OMq=DMq, hoc eſt $yy+\frac{cc-2cx+xx}{yy-2by+bb}yy = \frac{4bbcc-8bcxy+4xxyy}{y^4-2bbyy+b^4}yy$. Et per debitam reductionem orietur tandem

$$y^4 * \begin{matrix} +cc \\ -2bb \\ -2cx \\ -3xx \end{matrix}\; yy \begin{matrix} +2bxx \\ +4bcx \\ +2bcc \end{matrix}\; y \begin{matrix} +b^4 \\ -3bbcc \\ -2bbcx \\ +bbxx \end{matrix} = 0.$$

Divide omnia per $y-b$, & evadet

$$y^3+byy \begin{matrix} -bb \\ +cc \\ -2cx \\ -3xx \end{matrix}\; y \begin{matrix} -b^3 \\ +3bcc \\ +2bcx \\ -bxx \end{matrix} = 0.$$

Quare punctum D eſt ad Curvam trium dimenſionum; quæ tamen evadit Hyperbola ubi angulus BPM ſtatuitur nullus, ſive angulorum

Digitized by Google

lum ad baſem unus DBA duplus alterius DAB. Tunc enim BN, ſive b evaneſcente, æquatio fiet $yy=3xx+2cx-cc$.

Ex hujus autem æquationis conſtructione tale elicitur Theorema. Si centro C, Aſymptotis CS, CT, angulum SCT 120 graduum continentibus deſcribatur Hyperbola quævis DV, cujus ſemiaxes ſint CV, CA: produc CV ad B, ut ſit VB=VC, & ab A & B actis utcunque rectis AD, BD concurrentibus ad Hyperbolam, erit angulus BAD dimidium anguli ABD, triens vero anguli ADE quem recta AD comprehendit cum BD producta. Hoc intelligendum eſt de Hyperbola quæ tranſit per punctum V. Quod ſi ab iiſdem punctis A & B actæ rectæ Ad, Bd conveniant ad conjugatam Hyperbolam quæ tranſit per A: tunc externorum angulorum trianguli ad baſem, ille ad B erit duplus alterius ad A. TAB. V. Fig. 6.

PROB. XLIII.

Circulum per data duo puncta deſcribere qui rectam poſitione datam continget.

Sunto A & B puncta data, & EF recta poſitione data, & requiratur circulum ABE, per iſta puncta deſcribere qui contingat rectam iſtam FE. Junge AB, & eam biſeca in D. Ad D erige normalem DF occurrentem rectæ FE in F, & circuli centrum incidet in hanc noviſſime ductam DF, puta in C. Junge ergo CB; & ad FE demitte CE normalem, eritque E punctum contactus, ac CB, CE æquales inter ſe, utpote radii circuli quæſiti. Jam cum puncta A, B, D, & F dentur, eſto $DB=a$, ac $DF=b$; & ad determinandum centrum circuli quæratur DC, quam ideo dic x. Jam in triangulo CDB propter angulum ad D rectum, eſt $\sqrt{DBq+DCq}$, hoc eſt $\sqrt{aa+xx}=CB$. Eſt & DF−DC ſive $b-x=CF$. Et in triangulo rectangulo CFE cum dentur anguli, dabitur ratio laterum CF & CE; ſit iſta d ad e; & erit $CE=\frac{e}{d}\times CF$ hoc eſt $=\frac{eb-ex}{d}$. Pone jam CB & CE, (radios nempe circuli quæſiti,) æquales inter ſe, & habebitur æquatio TAB. V. Fig. 7.

√

Digitized by Google

$\sqrt{aa+xx}=\frac{eb-ex}{d}$. Cujus partibus quadratis & multiplicatis per dd, oritur $aadd+ddxx=eebb-2eebx+eexx$. Sive

$$xx=\frac{+eebb-2eebx-aadd}{dd-ee}.$$ Et extracta radice, $$x=\frac{-eeb+d\sqrt{eebb+eeaa-ddaa}}{dd-ee}.$$

Inventa eſt ergo longitudo DC adeoque centrum C, quo circulus per puncta A & B deſcribendus eſt ut contingat rectam FE.

PROB. XLIV.

Circulum per datum punctum deſcribere qui rectas duas poſitione datas continget.

Tab. V. Fig. 8.

Eſto datum punctum A, & ſint EF, FG rectæ duæ poſitione datæ, & AEG circulus quæſitus eaſdem contingens, ac tranſiens per punctum iſtud A. Rectâ CF biſecetur angulus EFG & centrum circuli in ipſa reperietur. Sit iſtud C; & ad EF & FG demiſſis perpendiculis CE, CG erunt E ac G puncta contactus. Jam in triangulis CEF, CGF, cum anguli ad E & G, ſint recti, & anguli ad F ſemiſſes ſint anguli EFG, dantur omnes anguli adeoque ratio laterum CF & CE vel CG. Sit iſta d ad e, & ſi ad determinandum centrum circuli quæſiti C, aſſumatur CF $=x$, erit CE vel CG $=\frac{ex}{d}$. Præterea ad FC demitte normalem AH, & cum punctum A detur, dabuntur etiam rectæ AH & FH. Dicantur iſtæ a & b, & ab FH ſive b ablato FC ſive x reſtabit CH $=b-x$. Cujus quadrato $bb-2bx+xx$ adde quadratum ipſius AH, ſive aa & ſumma $aa+bb-2bx+xx$, erit ACq per 47. I. Elem. ſiquidem angulus AHC ex Hypotheſi ſit rectus. Pone jam radios circuli AC & CG inter ſe æquales; hoc eſt pone æqualitatem inter eorum valores, vel inter quadrata eorum, & habebitur æquatio $aa+bb-2bx+xx=\frac{eexx}{dd}$. Aufer utrobique xx,

Reſolvitur ut *Prob.* 43. Nam dato puncto A, datur & aliud punctum B.

&

& mutatis omnibus ſignis erit $-aa-bb+2bx=xx-\frac{eexx}{dd}$. Duc omnia in dd, ac divide per $dd-ee$, & evadet $\frac{-aadd-bbdd+2bddx}{dd-ee}=xx$. Cujus æquationis extracta radix eſt $x=\frac{bdd-d\sqrt{eebb+eeaa-ddaa}}{dd-ee}$. Inventa eſt itaque longitudo FC, adeoque punctum C, quod centrum eſt circuli quæſiti.

Si inventus valor x ſive FC auferatur de b ſive HF, reſtabit $HC=\frac{-eeb+d\sqrt{eebb+eeaa-ddaa}}{dd-ee}$. eadem æquatio quæ in priori problemate prodiit, ad determinandum longitudinem DC.

PROB. XLV.

Circulum per data duo puncta deſcribere, qui alium circulum poſitione datum continget. Vide Prop. 21.

Sint A, B puncta data, EK circulus poſitione & magnitudine datus, F centrum ejus, ABE circulus quæſitus per puncta A & B tranſiens, ac tangens alterum circulum in E, & C centrum ejus. Ad AB productum demitte perpendicula CD, & FG & age CF, ſecantem circulos in puncto contactus E, ac age etiam FH parallelam DG, & occurrentem CD in H. His conſtructis dic AD vel DB $=a$, DG vel HF $=b$, GF $=c$, & EF (radium nempe circuli dati) $=d$, atque DC $=x$: & erit CH $(=CD-FG)=x-c$, & CFq $(=CHq+HFq)=xx-2cx+cc+bb$, atque CBq $(=CDq+DBq)=xx+aa$, adeoque CB vel CE $=\sqrt{xx+aa}$. Huic adde EF, & habebitur CF $=d+\sqrt{xx+aa}$, cujus quadratum $dd+aa+xx+2d\sqrt{xx+aa}$, æquatur valori ejuſdem CFq prius invento, nempe $xx-2cx+cc+bb$. Aufer utrobique xx, & reſtabit $dd+aa+2d\sqrt{xx+aa}=cc+bb-2cx$. Aufer inſuper $dd+aa$, & habebitur $2d\sqrt{xx+aa}=cc+bb-dd-aa-2cx$. Jam, abbreviandi cauſa, pro $cc+bb-dd-aa$, ſcribe $2gg$, & habe- Tab. VI. Fig. 1.

habebitur $2d\sqrt{xx+aa}=2gg-2cx$, ſive $d\sqrt{xx+aa}=gg-cx$. Et partibus æquationis quadratis, erit $ddxx+ddaa=g^4-2ggcx+ccxx$. Utrinque aufer $ddaa$ & $ccxx$, & reſtabit $ddxx-ccxx=g^4-ddaa-2ggcx$. Et partibus æquationis diviſis per $dd-cc$, habebitur $xx=\frac{g^4-ddaa-2ggcx}{dd-cc}$. Atque per extractionem radicis affectæ $x=\frac{-ggc+\sqrt{g^4dd-d^4aa+ddaacc}}{dd-cc}$.

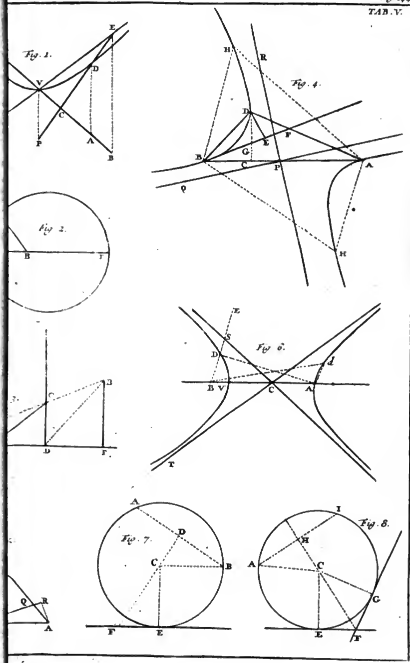
Inventa igitur x, ſive longitudine DC, biſeca AB in D, & ad D erige perpendiculum $DC=\frac{-ggc+d\sqrt{g^4-aadd+aacc}}{dd-cc}$. Dein centro C per punctum A vel B deſcribe circulum ABE; nam hic continget alterum circulum EK, & tranſibit per utrumque punctum A, B. Q. E. F.

PROB. XLVI.

Circulum per datum punctum deſcribere qui datum circulum, & rectam lineam poſitione datam continget.

TAB. VI. Fig. 2. Sit circulus iſte deſcribendus BD, ejus centrum C, punctum per quod deſcribi debet B, recta quam continget AD, punctum contactus D, circulus quem continget GEM, ejus centrum F, & punctum contactus E. Junge CB, CD, CF, & CD erit perpendicularis ad AD, atque CF ſecabit circulos in puncto contactus E. Produc CD ad Q ut ſit DQ=EF & per Q age QN parallelam AD. Denique à B & F ad AD & QN demitte perpendicula BA, FN, & à C ad AB & FN perpendicula CK, CL. Et cum ſit BC=CD vel AK, erit BK (=AB−AK) = AB−BC, adeoque $BKq=ABq-2AB\times BC+BCq$. Aufer hoc de BCq, & reſtabit $2AB\times BC-ABq$, pro quadrato de CK. Eſt itaque $AB\times\overline{2BC-AB}=CKq$; & eodem argumento erit $FN\times\overline{2FC-FN}=CLq$, atque adeo $\frac{CKq}{AB}+AB=2BC$, & $\frac{CLq}{FN}+FN=2FC$.

Quam-



Digitized by Google

Digitized by Google

Quamobrem ſi pro AB, CK, FN, KL, & CL, ſcribas $a, y, b, c,$ & $c-y$, erit $\frac{yy}{2a}+\frac{1}{2}a=$ BC, & $\frac{cc-2cy+yy}{2b}+\frac{1}{2}b=$ FC. De FC aufer BC, & reſtabit EF $=\frac{cc-2cy+yy}{2b}+\frac{1}{2}b-\frac{yy}{2a}-\frac{1}{2}a$. Jam ſi puncta ubi FN producta ſecat rectam AD, & circulum GEM notentur literis H, G, & M & in HG producta capiatur HR=AB, cum ſit HN (=DQ=EF)=GF, addendo FH utrinque erit FN=GH, adeoque AB—FN (=HR—GH)=GR, & AB—FN+2EF, hoc eſt $a-b+2$EF=RM, & $\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$ +EF=$\frac{1}{2}$RM. Quare cum ſupra fuerit EF $=\frac{cc-2cy+yy}{2b}+\frac{1}{2}b-\frac{yy}{2a}-\frac{1}{2}a$, ſi hoc ſcribatur pro EF habebitur $\frac{1}{2}$RM $=\frac{cc-2cy+yy}{2b}-\frac{yy}{2a}$. Dic ergo RM d, & erit $d=\frac{cc-2cy+yy}{b}-\frac{yy}{a}$. Duc omnes terminos in a & b, & orietur $abd=acc-2acy+ayy-byy$. Aufer utrinque $acc-2acy$, & reſtabit $abd-acc+2acy=ayy-byy$. Divide per $a-b$, & orietur $\frac{abd-acc+2acy}{a-b}=yy$. Et extracta radice $y=\frac{ac}{a-b}\pm\sqrt{\frac{aabd-abbd+abcc}{aa-2ab+bb}}$. Quæ concluſiones ſic abbreviari poſſunt. Pone $c.b::d.e$, dein $a-b.a::c.f$; & erit $fe-fc+2fy=yy$, ſive $y=f\pm\sqrt{ff+fe-fc}$. Invento y ſive KC vel AD, cape AD $=f\pm\sqrt{ff+fe-fc}$, ad D erige perpendiculum DC (=BC) $=\frac{KCq}{2AB}+\frac{1}{2}$AB, & centro C, intervallo CB vel CD deſcribe circulum BDE, nam hic tranſiens per datum punctum B, tanget rectam AD in D, & circulum GEM in E. Q.E.F.

Hinc circulus etiam deſcribi poteſt qui duos datos circulos, & rectam poſitione datam continget. Sint enim circuli dati RT, SV, eorum centra B, F, & recta poſitione data PQ. Centro F, radio TAB. VI. Fig. 3.

 FS

$FS - BR$ deſcribe circulum EM. A puncto B, ad rectam PQ demitte perpendiculum BP, & producto eo ad A ut ſit $PA = BR$ per A age AH parallelam PQ, & circulus deſcribatur qui tranſeat per punctum B, tangatque rectam AH, & circulum EM. Sit ejus centrum C; junge BC ſecantem circulum RT in R, & eodem centro C, radio vero CR deſcriptus circulus RS tanget circulos RT, SV, & rectam PQ, ut ex conſtructione manifeſtum eſt.

PROB. XLVII.

Circulum deſcribere qui per datum punctum tranſibit, & alios duos poſitione, & magnitudine datos circulos continget.

Tab. VI. Fig. 4. Eſto punctum datum A, ſintque circuli poſitione, & magnitudine dati TIV, RHS, centra eorum C & B, circulus deſcribendus AIH centrum ejus D, & puncta contactus I & H. Junge AB, AC, AD, DB, ſecetque AB producta circulum RHS in punctis R & S, & AC, producta circulum TIV in T & V. Et à punctis D & C demiſſis perpendiculis DE ad AB, & DF ad AC occurrente AB in G, atque CK ad AB; in triangulo ADB erit $ADq - DBq + ABq = 2AE \times AB$, per 13. II. Elem. Sed $DB = AD + BR$, adeoque $DBq = ADq + 2AD \times BR + BRq$. Aufer hoc de $ADq + ABq$, & reſtabit $ABq - 2AD \times BR - BRq$, pro $2AE \times AB$. Eſt & $ABq - BRq = \overline{AB - BR} \times \overline{AB + BR} = AR \times AS$. Quare $AR \times AS - 2AD \times BR = 2AE \times AB$. Et

$$\frac{AR\ AS - 2AB \times AE}{BR} = 2AD.$$

Et ſimili ratiocinio in triang. ADC emerget iterum $2AD = \frac{TAV - 2CAF}{CT}$. Quare $\frac{RAS - 2BAE}{BR} = \frac{TAV - 2CAF}{CT}$. Et $\frac{TAV}{CT} - \frac{RAS}{BR} + \frac{2BAE}{BR} = \frac{2CAF}{CT}$. Et $\overline{\frac{TAV}{CT} - \frac{RAS}{BR} + \frac{2BAE}{BR}} \times \frac{CT}{2AC} = AF$. Unde cum ſit $AK . AC :: AF . AG$, erit

AG

$AG = \overline{\frac{TAV}{CT} - \frac{RAS}{BR} + \frac{2BAE}{BR}} \times \frac{CT}{2AK}$. Aufer hoc de AE ſive $\frac{2KAE}{CT} \times \frac{CT}{2AK}$, & reſtabit $GE = \overline{\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT} - \frac{2BAE}{BR} + \frac{2KAE}{CT}} \times \frac{CT}{2AK}$. Unde cum ſit $KC . AK :: GE . DE$; erit $DE = \overline{\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT} - \frac{2BAE}{BR} + \frac{2KAE}{CT}} \times \frac{CT}{2KC}$. In AB cape AP quæ ſit ad AB ut CT ad BR, & erit $\frac{2PAE}{CT} = \frac{2BAE}{BR}$, adeoque $\frac{2PK \times AE}{CT} = \frac{2BAE}{BR} - \frac{2KAE}{CT}$, adeoque $DE = \overline{\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT} - \frac{2PK \times AE}{CT}} \times \frac{CT}{2KC}$. Ad AB erige ergo perpendiculum $AQ = \overline{\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT}} \times \frac{CT}{2KC}$, & in eo cape $QO = \frac{PK \times AE}{KC}$, & erit $AO = DE$.

Junge DO, DQ, CP, & triangula DOQ, CKP erunt ſimilia, quippe quorum anguli ad O & K ſunt recti, & latera (KC.PK::AE, vel DO.QO) proportionalia. Anguli ergo OQD, KPC æquales ſunt, & proinde QD perpendicularis eſt ad CP. Quamobrem ſi agatur AN parallela CP, & occurrens QD in N, angulus ANQ erit rectus, & triangula AQN, PCK ſimilia; adeoque PC.KC :: AQ.AN. Unde cum AQ ſit $\overline{\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT}} \times \frac{CT}{2KC}$, AN erit $\overline{\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT}} \times \frac{CT}{2PC}$. Produc AN ad M ut ſit NM = AN, & erit AD = DM, adeoque circulus quæſitus tranſibit per punctum M. Cum ergo punctum M datum ſit, ex his, ſine ulteriori Analyſi, talis emergit Problematis reſolutio.

In AB cape AP, quæ ſit ad AB ut CT ad BR; junge CP eique parallelam age AM, quæ ſit ad $\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT}$, ut CT ad PC: & ope *Prob.* 45. per puncta A & M deſcribe circulum AIHM

Digitized by Google

qui tangat alterutrum circulorum TIV, RHS, & idem circulus tanget utrumque. Q. E. F.

Et hinc circulus etiam deſcribi poteſt qui tres circulos poſitione & magnitudine datos continget. Sunto trium datorum circulorum radii A, B, C, & centra D, E, F. Centris E & F, radiis $B \pm A$, $C \pm A$ deſcribantur duo circuli, & tertius circulus qui hoſce tangat, tranſeatque per punctum D. Sit hujus radius G, & centrum H, & eodem centro H radio $G \pm A$ deſcriptus circulus continget tres primos circulos, ut fieri oportuit.

PROB. XLVIII.

TAB. VI. Fig. 5.

Si ad extremitates fili DAE circa paxillum A labentis appendantur pondera duo D & E, quorum pondus E labitur per lineam obliquam BG: Invenire locum ponderis E, ubi pondera hæc in æquilibrio conſiſtunt.

Puta factum, & ipſi AD age parallelam EF quæ ſit ad AE, ut pondus E ad pondus D. Et à punctis A & F ad lineam BG demitte perpendicula AB, FG. Jam cum pondera ex Hypotheſi ſint ut lineæ AE, EF, exponantur pondera per lineas iſtas, pondus D per lineam AE, & pondus E per lineam EF. Ergo Corpus E proprii ponderis vi directa EF tendit verſus F, & vi obliqua EG tendit verſus G. Et idem Corpus E, ponderis D vi directa AE, trahitur verſus A, & vi obliqua BE, trahitur verſus B. Cum itaque pondera ſe mutuo ſuſtineant in æquilibrio, vis qua pondus E trahitur verſus B æqualis eſſe debet vi contrariæ qua tendit verſus G, hoc eſt BE æqualis eſſe debet ipſi EG. Jam vero datur ratio AE ad EF ex Hypotheſi, & propter datum angulum FEG datur etiam ratio FE ad EG cui BE æqualis eſt. Ergo datur ratio AE ad BE. Datur etiam AB longitudine. Et inde triangulum ABE, & punctum

Digitized by Google

ctum E facile dabitur. Nempe dic $AB=a$, $BE=x$, & erit $AE=\sqrt{aa+xx}$, ſit inſuper AE ad BE in data ratione d ad e, & erit $e\sqrt{aa+xx}=dx$. Et partibus æquationis quadratis & reductis, $eeaa=ddxx-eexx$, ſive $\frac{ea}{\sqrt{dd-ee}}=x$. Inventa eſt igitur longitudo BE quæ determinat locum ponderis E. Q. E. F.

Quod ſi pondus utrumque per lineam obliquam deſcendat, Computum ſic inſtitui poteſt. Sint CD, BE obliquæ lineæ poſitione datæ per quas pondera iſta D & E deſcendunt. A paxillo A ad has lineas demitte perpendicula AC, AB, iiſque productis occurrant in punctis G & H lineæ EG, DH, à ponderibus perpendiculariter ad Horizontem erectæ, & vis qua pondus E conatur deſcendere juxta lineam perpendicularem, hoc eſt tota gravitas ipſius E erit ad vim qua pondus idem conatur deſcendere juxta lineam obliquam BE ut GE ad BE, atque vis qua conatur juxta lineam iſtam obliquam BE deſcendere erit ad vim qua conatur juxta lineam AE deſcendere hoc eſt ad vim qua filum AE diſtenditur ut BE ad AE. Adeoque gravitas ipſius E, erit ad tenſionem fili AE ut GE ad AE. Et eadem ratione gravitas ipſius D erit ad tenſionem fili AD ut HD ad AD. Sit itaque fili totius $DA+AE$ longitudo c, ſitque pars ejus $AE=x$, & erit altera pars $AD=c-x$. Et quoniam eſt $AEq-ABq=BEq$, & $ADq-ACq=CDq$, ſit inſuper $AB=a$, & $AC=b$, & erit $BE=\sqrt{xx-aa}$ & $CD=\sqrt{xx-2cx+cc-bb}$. Adhæc cum triangula BEG, CDH, dentur ſpecie, ſit $BE.EG::f.E$, & $CD.DH::f.g$, & erit $EG=\frac{E}{f}\sqrt{xx-aa}$, & $DH=\frac{g}{f}\sqrt{xx-2cx+cc-bb}$ Quamobrem cum ſit GE.AE :: pondus E. tenſionem AE. Et HD.AD :: pondus D. tenſionem AD, & tenſiones iſtæ æquentur inter ſe, erit $\frac{Ex}{\frac{E}{f}\sqrt{xx-aa}}$ = tenſioni AE = tenſioni AD $=\frac{Dc-Dx}{\frac{g}{f}\sqrt{xx-2cx+cc-bb}}$. Cujus æquationis reductione provenit

Tab. VI. Fig. 6.

venit $gx\sqrt{xx-2cx+cc-bb}=Dc-Dx\sqrt{xx-aa}$, ſive

$$\left.\begin{array}{l} gg \\ -DD \end{array}\right. x^4 \left.\begin{array}{l} -2ggc \\ +2DDc \end{array}\right. x^3 \left.\begin{array}{l} +ggcc \\ -ggbb \\ -DDcc \\ +DDaa \end{array}\right. xx - 2DDcaax + DDccaa = 0.$$

Si caſum deſideras quo hoc Problema per Regulam & circinum conſtrui queat, pone pondus D ad pondus E ut ratio $\frac{BE}{EG}$ ad rationem $\frac{CD}{DH}$, & evadet $g=D$, adeoque vice præcedentis æquationis habebitur hæc $\frac{aa}{-bb}xx-2aacx+aacc=0$; ſive $x=\frac{ac}{a+b}$.

PROB. XLIX.

TAB. VI. Fig. 7. *Si ad filum DACBF circa paxillos duos A, B, labile appendantur tria pondera D, E, F; D & F ad extremitates fili & E ad medium ejus punctum C, inter paxillos poſitum: Ex datis ponderibus & ſitu paxillorum invenire ſitum puncti C, ad quod medium pondus appenditur ubi pondera conſiſtunt in æquilibrio.*

Cum tenſio fili AC æquetur tenſioni fili AD, & tenſio fili BC tenſioni fili BF, tenſiones filorum AC, BC, EC erunt ut pondera D, F, E. In eadem ponderum ratione cape partes filorum CG, CH, CI. Compleatur triangulum GHI. Produc IC donec ea occurrat GH in K, & erit GK=KH, & CK=$\frac{1}{2}$CI, adeoque C centrum gravitatis trianguli GHI. Nam per C agatur ipſi CE perpendiculare PQ, & huic à punctis G & H perpendicularia GP, HQ. Et ſi vis qua filum AC vi ponderis D trahit punctum C verſus A, exponatur per lineam GC, vis qua filum iſtud trahet idem punctum verſus P exponetur per lineam CP, & vis qua trahit illud verſus K exponetur per lineam GP. Et ſimiliter

Digitized by Google

liter vires quibus filum BC vi ponderis F, trahit idem punctum C verſus B, Q & K, exponentur per lineas CH, CQ, HQ; & vis qua filum CE vi ponderis E, trahit punctum illud C verſus E, exponetur per lineam CI. Jam cum punctum C viribus æquipollentibus ſuſtineatur in æquilibrio, ſumma virium quibus fila AC & BC, ſimul trahunt punctum C verſus K, æqualis erit vi contrariæ qua filum EC, trahit punctum illud verſus E, hoc eſt ſumma GP+HQ, æqualis erit ipſi CI; & vis qua filum AC trahit punctum C verſus P, æqualis erit vi contrariæ qua filum BC, trahit idem punctum C verſus Q, hoc eſt linea PC æqualis lineæ CQ. Quare cum PG, CK & QH parallelæ ſint, erit etiam $GK=KH$, & $CK\ (=\frac{GP+HQ}{2})=\frac{1}{2}CI$. Quod erat oſtendendum. Reſtat itaque triangulum GCH determinandum, cujus latera GC & HC, dantur, una cum linea CK, quæ à vertice C ad medium baſis ducitur. Demittatur itaque à vertice C ad baſem GH perpendiculum CL, & erit $\frac{GCq-CHq}{2GH}=KL=\frac{GCq-KCq-GKq}{2GK}$. Pro 2GK ſcribe GH, & rejecto communi diviſore GH, & ordinatis terminis, erit $GCq-2KCq+CHq=2GKq$, ſive $\sqrt{\frac{1}{2}GCq-KCq+\frac{1}{2}CHq}=GK$. Invento GK vel KH, dantur ſimul anguli GCK, KCH, ſive DAC, FBC. Quare à punctis A & B in datis iſtis angulis DAC, FBC duc lineas AC, BC concurrentes in puncto C, & iſtud C erit punctum quod quæritur.

Cæterum quæſtiones omnes quæ ſunt ejuſdem generis non ſemper opus eſt per Algebram ſigillatim ſolvere, ſed ex ſolutione unius plerumque conſectatur ſolutio alterius. Ut ſi jam proponeretur hæc quæſtio.

TAB. VI. Fig. 8.

Filo ACDB in datas partes AC, CD, DB diviſo & extremitatibus ejus ad paxillos duos A, B poſitione datos ligatis, ſi ad puncta diviſionum C ac D appendantur pondera duo E & F; ex dato pondere F, & ſitu punctorum C ac D, cognoſcere pondus E.

Ex præcedentis Problematis ſolutione ſatis facile colligetur hæcce ſolutio hujus. Produc lineas AC, BD, donec occurrant lineis DF, CE in G & H; & erit pondus E ad pondus F ut DG ad CH.

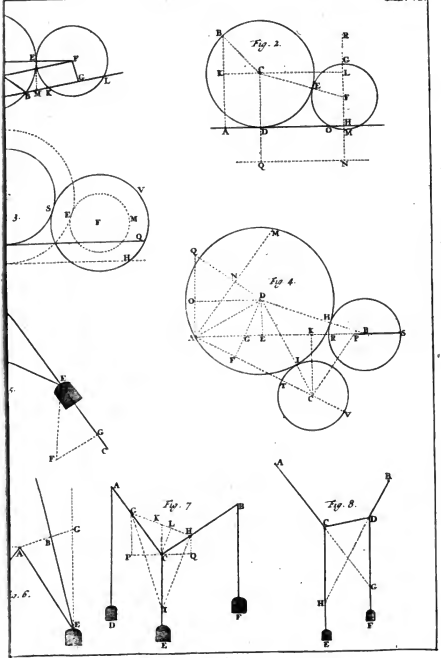
Et hinc obiter patet ratio componendi ſtateram ex ſolis filis, qua pondus corporis cujuſvis E, ex unico dato pondere F cognoſci poteſt.

PROB. L.

Lapide in puteum decidente, ex ſono lapidis fundum percutientis, altitudinem putei cognoſcere.

Sit altitudo putei x, & ſi lapis motu uniformiter accelerato deſcendat per ſpatium quodlibet datum a in tempore dato b, & ſonus motu uniformi tranſeat per idem ſpatium datum a in tempore dato d, lapis deſcendet per ſpatium x, in tempore $b\sqrt{\frac{x}{a}}$, ſonus autem qui fit à lapide in fundum putei impingente aſcendet per idem ſpatium x, in tempore $\frac{dx}{a}$. Ut enim ſunt ſpatia gravibus decidentibus deſcripta, ita ſunt quadrata temporum deſcenſus. Vel ut radices ſpatiorum, hoc eſt ut $\sqrt{x}$ & $\sqrt{a}$, ita ſunt ipſa tempora. Et ut ſpatia x & a, per quæ ſonus tranſit, ita ſunt tempora tranſitus. Ex horum temporum $b\sqrt{\frac{x}{a}}$ & $\frac{dx}{a}$ ſumma, conflatur tempus à lapide demiſſo ad ſonus reditum. Hoc tempus ex obſervatione cognoſci poteſt.

TAB. VI.



Digitized by Google

poteſt. Sit ipſum t, & erit $b\sqrt{\frac{x}{a}}+\frac{dx}{a}=t$. Ac $b\sqrt{\frac{x}{a}}=t-\frac{dx}{a}$. Et partibus quadratis $\frac{bbx}{a}=tt-\frac{2tdx}{a}+\frac{ddxx}{aa}$. Et per reductionem $xx=\frac{2adt+abb}{dd}x-\frac{aatt}{dd}$. Et extracta radice $x=\frac{adt+\frac{1}{2}abb}{dd}-\frac{ab}{2dd}\sqrt{bb+4dt}$.

PROB. LI.

Dato globo A, poſitione parietis DE, & centri globi B à pariete diſtantia BD; invenire molem globi B ea lege ut in ſpatiis liberis, & vi gravitatis deſtitutis, ſi globus A, cujus centrum in linea BD, quæ ad parietem perpendicularis eſt, ultra B producta conſiſtit, uniformi cum motu verſus D feratur donec is impingat in alterum quieſcentem globum B; globus iſte B poſtquam reflectitur à pariete, denuo occurrat globo A in dato puncto C. Tab. VII. Fig. 1.

Sit globi A celeritas ante reflectionem a & erit per Prob. XII. p. 77. celeritas globi A poſt reflexionem $=\frac{aA-aB}{A+B}$, & celeritas globi B poſt reflexionem $=\frac{2aA}{A+B}$. Ergo celeritas globi A ad celeritatem globi B eſt ut $A-B$ ad $2A$. In GD cape $gD=GH$ diametro nempe globi B, & celeritates iſtæ erunt ut GC ad $Gg+gC$. Nam ubi Globus A impegit in globum B, punctum G quod in ſuperficie globi B exiſtens movetur in linea AD, perget per ſpatium Gg antequam globus ille B impinget in parietem, & per ſpatium gC poſtquam à pariete reflectitur; hoc eſt per totum ſpatium $Gg+gC$, in eodem tempore quo globi A punctum F perget per ſpatium GC, eo ut globus uterque rurſus conveniant & in ſe mu-

tuo impingant in puncto dato C. Quamobrem cum dentur intervalla BC & CD, dic $BC=m$, $BD+CD=n$, & $BG=x$, & erit $GC=m+x$, & $Gg+gC=GD+DC-2gD=GB+BD+DC-2GH=x+n-4x$, ſeu $=n-3x$. Supra erat $A-B$ ad $2A$ ut celeritas globi A ad celeritatem globi B, & celeritas globi A ad celeritatem globi B ut GC ad $Gg+gC$, adeoque $A-B$ ad $2A$ ut GC ad $Gg+gC$, ergo cum ſit $GC=m+x$, & $Gg+gC=n-3x$, erit $A-B$ ad $2A$ ſicut $m+x$ ad $n-3x$. Porro globus A eſt ad globum B ut cubus radii ejus AF ad cubum radii alterius GB, hoc eſt ſi ponas radium AF eſſe s, ut s^3 ad x^3. Ergo $s^3-x^3.2s^3$ $(::A-B.2A)::m+x.n-3x$. Et ductis extremis & mediis in ſe habebitur æquatio $s^3n-3s^3x-nx^3+3x^4=2ms^3+2xs^3$. Et per reductionem $3x^4-nx^3-5s^3x\begin{smallmatrix}+s^3n\\-2s^3m\end{smallmatrix}=0$. Cujus æquationis conſtructione dabitur globi B ſemidiameter x, quo dato datur etiam Globus ille. Q. E. F.

Nota vero quod ubi punctum C jacet ad contrarias partes globi B, debet ſignum quantitatis $2m$ mutari, & ſcribi $3x^4-nx^3$ $-5s^3x\begin{smallmatrix}+s^3n\\+2s^3m\end{smallmatrix}=0$.

Si datus eſſet Globus B & quæreretur Globus A ea lege ut globi duo poſt reflexionem convenirent in C, quæſtio foret facilior. Nempe in inventa æquatione noviſſima ſupponendum eſſet x dari & s quæri. Qua ratione per debitam reductionem illius æquationis, tranſlatis terminis $-5s^3x+s^3n-2s^3m$ ad æquationis partem contrariam ac diviſa utraque parte per $5x-n+2m$, emergeret $\frac{3x^4-nx^3}{5x-n+2m}=s^3$. Ubi per ſolam extractionem radicis cubicæ obtinebitur s.

Quod ſi dato Globo utroque quæreretur punctum C in quo poſt reflexionem ambo in ſe mutuo impingerent: Cum ſupra fuerit $A-B$ ad $2A$ ut GC ad $Gg+gC$ ergo invertendo & componendo $3A-B$ erit ad $A-B$ ut $2Gg$ ad diſtantiam quæſitam GC.

PROB.

PROB. LII.

Si globi duo A & B tenui jungantur filo PQ, & pendente globo B à globo A, ſi dimittatur globus A, ita ut globus uterque ſimul ſola gravitatis vi in eadem linea perpendiculari PQ cadere incipiat; dein globus inferior B, poſtquam à fundo ſeu plano horizontali FG ſurſum reflectitur, ſuperiori decidenti globo A occurrat in puncto quodam D: Ex data fili longitudine PQ, & puncti illius D à fundo diſtantia DF, invenire altitudinem PF, à qua globus ſuperior A ad hunc effectum demitti debet. TAB. VII. Fig. 2.

Sit fili PQ longitudo a. In perpendiculo PQRF ab F ſurſum cape FE æqualem globi inferioris diametro QR, ita ut cum globi illius punctum infimum R incidit in fundum ad F, punctum ejus ſupremum Q occupet locum E; ſitque ED diſtantia per quam globus ille poſtquam à fundo reflectitur aſcendendo tranſit antequam globo ſuperiori decidenti occurrat in puncto D. Igitur ob datam puncti D à fundo diſtantiam DF, globique inferioris diametrum EF, dabitur eorum differentia DE. Sit ea $=b$. Sitque altitudo per quam globus ille inferior antequam impingit in fundum cadendo deſcribit RF vel QE $=x$, ſiquidem ea ignoretur. Et invento x ſi eidem addantur EF & PQ habebitur altitudo PF, à qua globus ſuperior ad effectum deſideratum demitti debet.

Cum igitur ſit PQ$=a$, & QE$=x$, erit PE$=a+x$. Aufer DE ſeu b, & reſtabit PD$=a+x-b$. Eſt autem tempus deſcenſus globi A ut radix ſpatii cadendo deſcripti ſeu $\sqrt{a+x-b}$, & tempus deſcenſus globi alterius B ut radix ſpatii cadendo deſcripti, ſeu $\sqrt{x}$, & tempus aſcenſus ejuſdem ut differentia radicis illius & radicis ſpatii quod cadendo tantum à Q ad D deſcriberetur. Nam hæc differentia eſt ut tempus deſcenſus à D ad E, quod æquale eſt tempori aſcenſus ab E ad D. Eſt autem differentia illa $\sqrt{x}-\sqrt{x-b}$.

 Unde

Unde tempus deſcenſus & aſcenſus conjunctim erit ut $2\sqrt{x} - \sqrt{x-b}$. Quamobrem cum hoc tempus æquetur tempori deſcenſus globi ſuperioris erit $\sqrt{a+x-b} = 2\sqrt{x} - \sqrt{x-b}$. Cujus æquationis partibus quadratis habebitur $a+x-b = 5x - b - 4\sqrt{xx-bx}$, ſeu $a = 4x - 4\sqrt{xx-bx}$, & ordinata æquatione $4x - a = 4\sqrt{xx-bx}$. Cujus partes iterum quadrando oritur $16xx - 8ax + aa = 16xx - 16bx$, ſeu $aa = 8ax - 16bx$. Et diviſis omnibus per $8a - 16b$, fiet $\frac{aa}{8a-16b} = x$. Fac igitur ut $8a - 16b$ ad a ita a ad x, & habebitur x ſeu QE. Q. E. I.

Quod ſi ex dato QE quæreretur fili longitudo PQ ſeu a; eadem æquatio $aa = 8ax - 16bx$ extrahendo affectam radicem quadraticam daret $a = 4x - \sqrt{16xx - 16bx}$. Id eſt ſi ſumas QY mediam proportionalem inter QD & QE, erit $PQ = 4EY$. Nam media illa proportionalis erit $\sqrt{x \times \overline{x-b}}$, ſeu $\sqrt{xx-bx}$ quod ſubductum de x, ſeu QE relinquit EY, cujus quadruplum eſt $4x - 4\sqrt{xx-bx}$.

Sin vero ex datis tum QE ſeu x tum fili longitudine PQ ſeu a, quæreretur punctum D in quo globus ſuperior in inferiorem incidit; puncti illius à dato puncto E diſtantia DE ſeu b, è præcedente æquatione $aa = 8ax - 16bx$, eruetur transferendo aa & $16bx$ ad æquationis partes contrarias cum ſignis mutatis, & omnia dividendo per $16x$. Orietur enim $\frac{8ax - aa}{16x} = b$. Fac igitur ut $16x$, ad $8x - a$ ita a ad b, & habebitur b ſeu DE.

Hactenus ſuppoſui globos tenui filo connexos ſimul dimitti. Quod ſi nullo connexi filo diverſis temporibus dimittantur, ita ut globus ſuperior A verbi gratia prius dimiſſus, deſcenderit per ſpatium PT antequam globus alter incipiat cadere, & ex datis diſtantiis PT, PQ ac DE quæratur altitudo PF à qua globus ſuperior dimitti debet ea lege ut in inferiorem incidat ad punctum D; ſit $PQ = a$, $DE = b$, $PT = c$, & $QE = x$, & erit $PD = a + x - b$ ut ſupra. Et tempora quibus globus ſuperior cadendo deſcribat ſpatia PT ac TD,

TD, & globus inferior prius cadendo dein reaſcendendo deſcribat ſummam ſpatiorum QE+ED erunt ut $\sqrt{PT}$, $\sqrt{PD}-\sqrt{PT}$, & $2\sqrt{QE}-\sqrt{QD}$ hoc eſt ut $\sqrt{c}$, $\sqrt{a+x-b}-\sqrt{c}$, & $2\sqrt{x}-\sqrt{x-b}$. At ultima duo tempora, propterea quod ſpatia TD, & QE+ED ſimul deſcribuntur, æqualia ſunt. Ergo $\sqrt{a+x-b}-\sqrt{c}=2\sqrt{x}-\sqrt{x-b}$. Et partibus quadratis $a+c-2\sqrt{ca+cx-cb}=4x-4\sqrt{xx-bx}$. Pone $a+c=e$, & $a-b=f$, & erit per debitam reductionem $4x-e+2\sqrt{cf+cx}=4\sqrt{xx-bx}$, & partibus quadratis $ee-8ex+16xx+4cf+4cx+\overline{16x-4e}\sqrt{cf+cx}=16xx-16bx$. Ac deletis utrobique $16xx$ & pro $ee+4cf$ ſcripto m nec non pro $8e-16b-4c$ ſcripto n, habebitur per debitam reductionem $\overline{16x-4e}\sqrt{cf+cx}=nx-m$. Et partibus quadratis $256cfxx+256cx^3-128cefx-128cexx+16ceef+16ceex=nnxx-2mnx+mm$. Et ordinata æquatione

$$256cx^3 \begin{array}{l}+256cf\\-128ce\\-nn\end{array} xx \begin{array}{l}-128cef\\+16cee\\+2mn\end{array} x \begin{array}{l}+16ceef\\-mm\end{array} = 0.$$

Cujus æquationis conſtructione dabitur x ſeu QE, cui ſi addas datas diſtantias PQ, & EF habebitur altitudo PF quam oportuit invenire.

PROB. LIII.

Si globi duo quieſcentes ſuperior A, & inferior B diverſis temporibus dimittantur; & globus inferior eo temporis momento cadere incipiat ubi ſuperior cadendo jam deſcripſit ſpatium PT; invenire loca α, β quæ globi illi cadentes occupabunt ubi eorum intervallum ϖχ dato æquale eſt. TAB. VII. Fig. 3.

Cum dentur diſtantiæ PT, PQ, & ϖχ dic primam a, ſecundam b, tertiam c, & pro Pϖ ſeu ſpatio quod globus ſuperior antequam pervenit ad locum quæſitum α cadendo deſcribit ponatur x. Jam tempora quibus globus ſuperior deſcribit ſpatia PT, Pϖ, Tϖ,

&

& inferior ſpatium $Q\chi$ ſunt, ut $\sqrt{PT}$, $\sqrt{P\varpi}$, $\sqrt{P\varpi} - \sqrt{PT}$, & $\sqrt{Q\chi}$. Quorum temporum poſteriora duo, eo quod globi cadendo ſimul deſcribant ſpatia $T\varpi$ & $Q\chi$, ſunt æqualia. Unde & $\sqrt{P\varpi} - \sqrt{PT}$ æquale erit $\sqrt{Q\chi}$. Erat $P\varpi = x$, & $PT = a$, & ad $P\varpi$ addendo $\varpi\chi$ ſeu c & à ſumma auferendo PQ ſeu b habebitur $Q\chi = x + c - b$. Quamobrem his ſubſtitutis fiet $\sqrt{x} - \sqrt{a} = \sqrt{x + c - b}$. Et æquationis partibus quadratis orietur $x + a - 2\sqrt{ax} = x + c - b$. Ac deleto utrobique x, & ordinata æquatione habebitur $a + b - c = 2\sqrt{ax}$. Et partibus quadratis erit quadratum de $a + b - c$ æquale $4ax$, & quadratum illud diviſum per $4a$ æquale x, ſeu $4a$ ad $a + b - c$ ſicut $a + b - c$ ad x. Ex invento autem x ſeu $P\varpi$ datur globi ſuperioris decidentis locus quæſitus α. Et per locorum diſtantiam ſimul datur etiam locus inferioris β.

Et hinc ſi punctum quæratur ubi globus ſuperior cadendo tandem impinget in inferiorem; ponendo diſtantiam $\varpi\chi$ nullam eſſe ſeu delendo c, dic $4a$ ad $a + b$ ut $a + b$ ad x, ſeu $P\varpi$, & punctum ϖ erit quod quæris.

Et viciſſim ſi detur punctum illud ϖ vel χ in quo globus ſuperior incidit in inferiorem, & quæratur locus T quem ſuperioris globi decidentis punctum imum P tunc occupabat cum globus inferior incipiebat cadere; quoniam eſt $4a$ ad $a + b$ ut $a + b$ ad x, ſeu ductis extremis & mediis in ſe $4ax = aa + 2ab + bb$, & per æquationis debitam ordinationem $aa = 4ax - 2ab - bb$; extrahe radicem quadraticam & proveniet $a = 2x - b - 2\sqrt{xx - bx}$. Cape ergo $V\varpi$ mediam proportionalem inter $P\varpi$ & $Q\varpi$, & verſus V cape $VT = VQ$, & erit T punctum quod quæris. Nam $V\varpi$ erit $= \sqrt{P\varpi \times Q\varpi}$ hoc eſt $= \sqrt{x \times \overline{x - b}}$ ſeu $= \sqrt{xx - bx}$; cujus duplum ſubductum de $2x - b$, ſeu de $2P\varpi - PQ$, hoc eſt de $PQ + 2Q\varpi$ relinquit $PQ - 2VQ$ ſeu $PV - VQ$, hoc eſt PT.

Si denique globorum, poſtquam ſuperior incidit in inferiorem, & impetu in ſe invicem facto inferior acceleratur, ſuperior retardatur, deſiderantur loci ubi inter cadendum diſtantiam datæ rectæ æqualem acquirent: Quærendus erit primo locus ubi ſuperior impingit in inferiorem; dein ex cognitis tum magnitudinibus globorum tum eo-

eorum ubi in ſe impingunt celeritatibus inveniendæ ſunt celeritates quas proxime poſt reflexionem habebunt, idque per modum Prob. XII. pag. 77. Poſtea quærenda ſunt loca ſumma ad quæ globi celeritatibus hiſce ſi ſurſum ferantur aſcenderent, & inde cognoſcentur ſpatia quæ globi datis temporibus poſt reflexionem cadendo deſcribent, ut & differentia ſpatiorum: & viciſſim ex aſſumpta illa differentia, per Analyſin regredietur ad ipſa ſpatia cadendo deſcripta.

Ut ſi globus ſuperior incidit in inferiorem ad punctum ϖ, & poſt reflexionem celeritas ſuperioris deorſum tanta ſit, ut ſi ſurſum eſſet aſcendere faceret globum illum per ſpatium ϖN, & inferioris celeritas deorſum tanta eſſet, ut ſi ſurſum eſſet, aſcendere faceret globum illum inferiorem per ſpatium ϖM; tum tempora quibus globus ſuperior viciſſim deſcenderet per ſpatia $N\varpi$, NG, & inferior per ſpatia $M\varpi$, MH, forent ut $\sqrt{N\varpi}$, $\sqrt{NG}$, $\sqrt{M\varpi}$, $\sqrt{MH}$, adeoque tempora quibus globus ſuperior conficeret ſpatium ϖG, & inferior ſpatium ϖH, forent ut $\sqrt{NG} - \sqrt{N\varpi}$, ad $\sqrt{MH} - \sqrt{M\varpi}$. Pone hæc tempora æqualia eſſe, & erit $\sqrt{NG} - \sqrt{N\varpi} = \sqrt{MH} - \sqrt{M\varpi}$. Et inſuper cum detur diſtantia GH pone $\varpi G + GH = \varpi H$. Et harum duarum æquationum reductione ſolvetur problema. Ut ſi ſit $M\varpi = a$, $N\varpi = b$, $GH = c$, $\varpi G = x$; erit juxta poſteriorem æquationem $x + c = \varpi H$. Adde $M\varpi$ fiet $MH = a + c + x$. Ad ϖG adde $N\varpi$, & fiet $NG = b + x$. Quibus inventis, juxta priorem æquationem erit $\sqrt{b+x} - \sqrt{b} = \sqrt{a+c+x} - \sqrt{a}$. Scribatur e pro $a+c$, & $\sqrt{f}$ pro $\sqrt{a} - \sqrt{b}$: & æquatio fiet $\sqrt{b+x} = \sqrt{e+x} - \sqrt{f}$. Et partibus quadratis $b + x = e + x + f - 2\sqrt{ef + fx}$, ſeu $e + f - b = 2\sqrt{ef+fx}$. Pro $e+f-b$ ſcribe g, & fiet $g = 2\sqrt{ef+fx}$, & partibus quadratis $gg = 4ef + 4fx$, & per reductionem $\frac{gg}{4f} - e = x$.

TAB. VII. Fig. 4.

Digitized by Google

PROB. LIV.

TAB. VII. Fig. 5. *Si duo ſint globi A, B, quorum ſuperior A ab altitudine G decidens, in alterum inferiorem B à fundo H verſus ſuperiora reſilientem incidat, & hi globi ita per reflexionem ab invicem denuo recedant ut globus A vi reflexionis illius ad altitudinem priorem G redeat, idque eodem tempore quo globus inferior B ad fundum H revertitur; dein globus A rurſus decidat, & in globum B à fundo reſilientem denuo incidat, idque in eodem loco A B ubi prius in ipſum incidebat; & ſic perpetuo globi ab invicem reſiliant rurſuſque ad eundem locum redeant: Ex datis globorum magnitudinibus, poſitione fundi, & loco G à quo globus ſuperior decidit, invenire locum ubi globi in ſe mutuo impingent.*

Sit *e* centrum globi A, & *f* centrum globi B, *d* centrum loci G in quo globus ſuperior in maxima eſt altitudine, *g* centrum loci globi inferioris ubi in fundum impingit, *a* ſemidiameter globi A, *b* ſemidiameter globi B, *c* punctum contactus globorum in ſe mutuo impingentium, & H punctum contactus globi inferioris & fundi. Et celeritas globi A, ubi in globum B impingit, ea erit quæ generatur caſu globi ab altitudine *de*, adeoque eſt ut $\sqrt{de}$. Hac eadem celeritate reflecti debet globus A verſus ſuperiora ut ad locum priorem G redeat. Et globus B eadem celeritate deorſum reflecti debet qua aſcenderat ut eodem tempore redeat ad fundum quo inde receſſerat. Ut autem hæc duo eveniant, globorum motus inter reflectendum æquales eſſe debent. Motus autem ex globorum celeritatibus & magnitudinibus componuntur, adeoque quod fit ex globi unius mole & celeritate æquale erit ei quod fit ex globi alterius mole & celeritate. Unde ſi factum ex unius globi mole & celeritate dividatur per molem alterius globi, habebitur celeritas alterius globi proxime ante & poſt reflexionem, ſeu ſub fine aſcenſus & initio deſcenſus. Erit igitur hæc celeritas

ritas ut $\frac{A\sqrt{de}}{B}$, ſeu cum globi ſint ut cubi radiorum ut $\frac{a^3\sqrt{de}}{b^3}$. Ut autem hujus celeritatis quadratum ad quadratum celeritatis globi A proxime ante reflexionem, ita altitudo ad quam globus B hac celeritate, ſi occurſu globi A in eum decidentis non impediretur, aſcenderet, ad altitudinem ed à qua globus A deſcendit. Hoc eſt ut $\frac{Aq}{Bq}de$ ad de ſeu ut Aq ad Bq vel a^6 ad b^6 ita altitudo illa prior ad x, ſi modo pro altitudine poſteriore ed ponatur x. Ergo hæc altitudo, ad quam nimirum B ſi non impediretur aſcenderet, eſt $\frac{a^6}{b^6}x$. Sit ea fK. Ad fK adde fg, ſeu $dH-de-ef-gH$, hoc eſt $p-x$ ſi modo pro dato $dH-ef-gH$ ſcribas p, & x pro incognito de & habebitur $Kg=\frac{a^6}{b^6}x+p-x$. Unde celeritas globi B ubi decidit à K ad fundum, hoc eſt ubi decidit per ſpatium Kg, quod centrum ejus inter decidendum deſcriberet erit ut $\sqrt{\frac{a^6}{b^6}x+p-x}$. At globus ille decidit à loco Bcf ad fundum eodem tempore quo globus ſuperior A aſcendit à loco Ace ad ſummam altitudinem d, aut viciſſim deſcendit à d ad locum Ace, & proinde cum gravium cadentium celeritates æqualibus temporibus æqualiter augeantur, celeritas globi B deſcendendo ad fundum tantum augebitur quanta eſt celeritas tota quam globus A eodem tempore cadendo à d ad e acquirat vel aſcendendo ab e ad d amittat. Ad celeritatem itaque quam globus B habet in loco Bcf adde celeritatem quam globus A habet in loco Ace, & ſumma, que eſt ut $\sqrt{de}+\frac{a^3\sqrt{de}}{b^3}$, ſeu $\sqrt{x}+\frac{a^3}{b^3}\sqrt{x}$, erit celeritas globi B ubi is in fundum incidit. Proinde $\sqrt{x}+\frac{a^3}{b^3}\sqrt{x}$ æquabitur $\sqrt{\frac{a^6}{b^6}x+p-x}$. Pro $\frac{a^3+b^3}{b^3}$ ſcribe $\frac{r}{s}$ & pro $\frac{a^6-b^6}{b^6}$, $\frac{rt}{ss}$ & æquatio illa fiet $\frac{r}{s}\sqrt{x}=\sqrt{\frac{rt}{ss}x+p}$, & partibus quadratis

$\frac{rr}{ss}x = \frac{rt}{ss}x + p$. Aufer utrobique $\frac{rt}{ss}x$, duc omnia in ss ac divide per $rr - rt$, & orietur $x = \frac{ssp}{rr - rt}$. Quæ quidem æquatio prodiiſſet ſimplicior ſi modo aſſumpſiſſem $\frac{p}{s}$ pro $\frac{a^3 + b^3}{b^3}$, prodiiſſet enim $\frac{ss}{p - t} = x$. Unde faciendo ut ſit $p - t$ ad s ut s ad x habebitur x ſeu ed; cui ſi addas ec habebitur dc, & punctum c in quo globi in ſe mutuo impingent. Q. E. F.

PROB. LV.

TAB. VII. Fig. 6. *Erectis alicubi terrarum tribus baculis ad Horizontale planum in punctis A, B, & C perpendicularibus, quorum is qui in A ſit ſex pedum, qui in B octodecim pedum, & qui in C octo pedum, exiſtente linea AB triginta trium pedum; contingit quodam die extremitatem umbræ baculi A, tranſire per puncta B & C, baculi autem B per A & C, ac baculi C per punctum A. Quæritur declinatio ſolis & elevatio Poli, ſive dies locuſque ubi hæc evenerint?*

Quoniam umbra baculi cujuſque deſcripſit Conicam ſectionem, ſectionem nempe Coni radioſi cujus vertex eſt baculi ſummitas; fingam BCDEF, eſſe hujuſmodi curvam (ſive ea ſit Hyperbola, Parabola vel Ellipſis) quam umbra baculi A eo die deſcripſit, ponendo AD, AE, AF ejus umbras fuiſſe cum BC, BA, CA reſpective fuerunt umbræ baculorum B & C. Et præterea fingam PAQ eſſe lineam Meridionalem ſive axem hujus curvæ ad quem demiſſæ perpendiculares BM, CH, DK, EN, & FL, ſunt ordinatim applicatæ. Has vero ordinatim applicatas indefinite deſignabo litera y, & axis partes interceptas AM, AH, AK, AN, & AL litera x. Fingam denique æquationem $aa + bx + cxx = yy$, ipſarum

rum x & y relationem (*i. e.* naturam Curvæ) deſignare, aſſumendo aa, b & c tanquam cognitas ut ex Analyſi tandem inveniantur. Ubi incognitas quantitates x & y, duarum tantum dimenſionum poſui quia æquatio eſt ad Conicam ſectionem; & ipſius y dimenſiones impares omiſi quia ipſa eſt ordinatim applicata ad axem. Signa autem ipſorum b & c, quia indeterminata ſunt deſignavi notula $\perp$ quam indifferenter pro + aut − uſurpo, & ejus oppoſitum $\top$ pro ſigno contrario. At ſignum quadrati aa affirmativum poſui, quia baculum A umbras in adverſas plagas (C & F, B & E) projicientem concava pars curvæ neceſſario complectitur, & proinde ſi ad punctum A erigatur perpendiculum Aβ, hoc alicubi occurret curvæ puta in β, hoc eſt, ordinatim applicat y, ubi x nullum eſt, erit reale. Nam inde ſequitur quadratum ejus, quod in eo caſu eſt aa, affirmativum eſſe.

Conſtat itaque quod æquatio hæc fictitia $aa \perp bx \perp cxx = yy$, ſicut terminis ſuperfluis non referta ſic neque reſtrictior eſt quam ut ad omnes hujus problematis conditiones ſe extendat, Hyperbolam, Ellipſin vel Parabolam quamlibet deſignatura prout ipſorum aa, b, c, valores determinabuntur, aut nulli forte reperientur. Quid autem valent, quibuſque ſignis b & c debent affici, & inde quænam ſit hæc curva ex ſequenti Analyſi conſtabit.

Analyſeos pars prior.

Cum umbræ ſint ut altitudines baculorum erit BC.AD::AB.AE (::18.6.)::3.1. Item CA.AF(::8.6.)::4.3. Quare nominatis AM $= r$, MB $= s$, AH $= t$, & HC $= \perp v$. Ex ſimilitudine triangulorum AMB, ANE, & AHC, ALF erunt AN $= -\frac{r}{3}$. NE $= -\frac{s}{3}$. AL $= -\frac{3t}{4}$. Et LF $= \top \frac{3v}{4}$: Quarum ſigna ſignis ipſarum AM, MB, AH, HC contraria poſui quia tendunt ad contrarias plagas reſpectu puncti A à quo ducuntur, axiſve PQ cui inſiſtunt. His autem pro x & y in æquatione fictitia $aa \perp bx \perp cxx = yy$, reſpective ſcriptis,

r & s dabunt $aa \pm br \pm crr = ss.$

$-\frac{r}{3}$ & $-\frac{s}{3}$ dabunt $aa \mp \frac{br}{3} \pm \frac{1}{9}crr = \frac{1}{9}ss.$

t & $\pm v$ dabunt $aa \pm bt \pm ctt = vv.$

$-\frac{3}{4}t$ & $\mp\frac{3}{4}v$ dabunt $aa \mp \frac{3}{4}bt \pm \frac{9}{16}ctt = \frac{9}{16}vv.$

Jam è prima & ſecunda harum exterminando ss ut obtineatur r, prodit $\frac{2aa}{\pm b} = r$. Unde patet $\pm b$ eſſe affirmativum. Item è tertia & quarta exterminando vv ut obtineatur t prodit $\frac{aa}{3b} = t$. Et ſcriptis inſuper $\frac{2aa}{b}$ pro r in prima, & $\frac{aa}{3b}$ pro t in tertia, oriuntur $3aa \pm \frac{4a^4c}{bb} = ss$, & $\frac{4}{3}aa \pm \frac{a^4c}{9bb} = vv$.

Porro demiſſa Bλ perpendiculari in CH, erit BC.AD(: : 3. 1.) : : Bλ . AK : : Cλ .DK. Quare cum ſit Bλ $(= AM - AH = r - t)$ $= \frac{5aa}{3b}$, erit $AK = \frac{5aa}{9b}$, vel potius $= -\frac{5aa}{9b}$. Item cum ſit Cλ $(= CH \pm BM = v \pm s) = \sqrt{\frac{4aa}{3} \pm \frac{a^4c}{9bb}} \pm \sqrt{3aa \pm \frac{4a^4c}{bb}}$, erit DK $(= \frac{1}{3}C\lambda) = \sqrt{\frac{4aa}{27} \pm \frac{a^4c}{81bb}} \pm \sqrt{\frac{1}{3}aa \pm \frac{4a^4c}{9bb}}$. Quibus in æquatione $aa + bx \pm cxx = yy$, pro AK ac DK ſive x, & y reſpectivè ſcriptis, prodit $\frac{4aa}{9} \pm \frac{25a^4c}{81bb} = \frac{11}{27}aa \pm \frac{37a^4c}{81bb} \pm 2\sqrt{\frac{4aa}{27} \pm \frac{a^4c}{81bb}} \times \sqrt{\frac{aa}{3} \pm \frac{4a^4c}{9bb}}$. Et per reductionem $-bb \mp 4aac = \pm 2\sqrt{36b^4 \pm 51aabbc + 4a^4cc}$, & partibus quadratis iterumque reductis, exit $0 = 143b^4 \pm 196aabbc$, ſive $\frac{-143bb}{196aa} = \pm c$. Unde conſtat $\pm c$ negativam eſſe, adeoque æquationem fictitiam $aa \pm bx \pm cxx = yy$, hujus eſſe formæ $aa + bx - cxx = yy$, & ideo curvam quam

quam deſignat Ellipſin eſſe. Ejus vero centrum & axes duo ſic eruuntur.

Ponendo $y=0$, ſicut in Figuræ verticibus P & Q contingit, habebitur $aa+bx=cxx$, & extracta radice, $x=\frac{b}{2c}\pm\sqrt{\frac{bb}{4cc}+\frac{aa}{c}}=\begin{matrix}AQ\\AP\end{matrix}$. Adeoque ſumpto $AV=\frac{b}{2c}$, erit V centrum Ellipſis, & VQ vel VP ($\sqrt{\frac{bb}{4cc}+\frac{aa}{c}}$) ſemiaxis maximus. Si porro ipſius AV valor $\frac{b}{2c}$ pro x in æquatione $aa+bx-cxx=yy$ ſcribatur, fiet $aa+\frac{bb}{4c}=yy$. Quare eſt $aa+\frac{bb}{4c}=VZq$, hoc eſt quadrato ſemiaxis minimi. Denique in valoribus ipſarum AV, VQ, VZ jam inventis, ſcripto $\frac{143bb}{196aa}$ pro c, exeunt $\frac{98aa}{143b}=AV$, $\frac{112aa\sqrt{3}}{143b}=VQ$, & $\frac{8a\sqrt{3}}{\sqrt{143}}=VZ$.

Analyſeos pars altera.

TAB. VII. Fig. 7.

Supponatur jam baculum puncto A inſiſtens eſſe AR, & erit RPQ planum meridionale ac RPZQ conus radioſus cujus vertex eſt R. Sit inſuper TXZ planum ſecans Horizontem in VZ, ut & meridionale planum in TVX, quæ ſectio ſit ad axem mundi conive perpendicularis, & ipſum planum TXZ erit ad eundem axem perpendiculare, & conum ſecabit in peripheria circuli TZX, quæ ab ejus vertice pari ubique intervallo RX, RZ, RT diſtabit. Quamobrem ſi PS ipſi TX parallela ducatur, fiet RS=RP propter æquales RX, RT; nec non SX=XQ propter æquales PV, VQ. Unde eſt RX vel RZ $(=\frac{RS+RQ}{2})=\frac{RP+RQ}{2}$. Denique ducatur RV, & cum VZ perpendiculariter inſiſtat plano RPQ, (ſectio utique exiſtens planorum eidem perpendiculariter inſiſtentium) fiet triangulum RVZ rectangulum ad V.

Dictis

Dictis jam $RA=d$, $AV=e$, VP vel $VQ=f$, & $VZ=g$, erit $AP=f-e$, & $RP=\sqrt{ff-2ef+ee+dd}$. Item $AQ=f+e$, & $RQ=\sqrt{ff+2ef+ee+dd}$: adeoque $RZ\ (=\frac{RP+RQ}{2})$ $=\frac{\sqrt{ff-2ef+ee+dd}+\sqrt{ff+2ef+ee+dd}}{2}$. Cujus quadratum $\frac{dd+ee+ff}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{f^4-2eeff+e^4+2ddff+2ddee+d^4}$, eſt æquale $(RVq+VZq=RAq+AVq+VZq=)\ dd+ee+gg$. Jam reductione facta eſt $\sqrt{f^4-2eeff+e^4+2ddff+2ddee+d^4}=dd+ee-ff+2gg$, & partibus quadratis ac in ordinem redactis, $ddff=ddgg+gegg-ffgg+g^4$, ſive $\frac{ddff}{gg}=dd+ee-ff+gg$. Denique 6, $\frac{98aa}{143b}$, $\frac{112aa\sqrt{3}}{143b}$, & $\frac{8a\sqrt{3}}{\sqrt{143}}$ (valoribus ipſorum AR, AV, VQ, & VZ,) pro d, e, f, ac g reſtitutis, oritur $36-\frac{196a^4}{143bb}+\frac{192aa}{143}=\frac{36\times 14\times 14aa}{143bb}$, & inde per reductionem $\frac{49a^4+36\times 49aa}{48aa+1287}=bb$.

In Fig. 6. eſt $AMq+MBq=ABq$, hoc eſt $rr+ss=33\times 33$. Erat autem $r=\frac{2aa}{b}$, & $ss=3aa-\frac{4a^4c}{bb}$, unde $rr=\frac{4a^4}{bb}$, & (ſubſtituto $\frac{143bb}{196aa}$ pro c) $ss=\frac{4aa}{49}$ Quare $\frac{4a^4}{bb}+\frac{4aa}{49}=33\times 33$, & inde per reductionem iterum reſultat $\frac{4\times 49a^4}{53361-4aa}=bb$. Ponendo igitur æqualitatem inter duo bb, & dividendo utramque partem æquationis per 49 fit $\frac{a^4+36aa}{48aa+1287}=\frac{4a^4}{53361-4aa}$. Cujus partibus in crucem multiplicatis, ordinatis, ac diviſis per 49, exit $4a^4=985aa+39204$ cujus radix aa eſt $\frac{985+\sqrt{1589625}}{8}=280,2254144$.

Supra

Supra inventum fuit $\frac{4 \times 49 a^4}{53361 - 4aa} = bb$, ſive $\frac{14aa}{\sqrt{53361 - 4aa}} = b$. Unde AV $\left(\frac{98aa}{143b}\right)$ eſt $\frac{7\sqrt{53361 - 4aa}}{143}$, & V P vel V Q $\left(\frac{112aa\sqrt{3}}{143b}\right)$ eſt $\frac{8}{143}\sqrt{160083 - 12aa}$. Hoc eſt ſubſtituendo 280⌊2254144 pro aa, ac terminos in decimales numeros reducendo, AV = 11⌊188297, & VP vel VQ = 22⌊147085. Adeoque AP (PV−AV) = 10⌊958788, & AQ (AV+VQ) 33⌊335382.

Denique ſi $\frac{1}{6}$ AR ſive 1 ponatur Radius, erit $\frac{1}{6}$ AQ ſive 5⌊555897 tangens anguli ARQ 79 gr. 47′. 48″, & $\frac{1}{6}$ AP ſive 1⌊826465 tangens anguli ARP 61 gr. 17′. 57″. Quorum angulorum ſemiſumma 70 gr. 32′. 52″, eſt complementum declinationis Solis; & ſemidifferentia 9 gr. 14′. 56″, complementum latitudinis Loci. Proinde declinatio ſolis erat 19 gr. 27′. 8″, & Latitudo loci 80 gr. 45′. 4″. Quæ erant invenienda.

PROB. LVI.

E Cometæ motu uniformi rectilineo per Cœlum trajicientis locis quatuor obſervatis, diſtantiam à Terra, motuſque determinationem, in Hypotheſi Copernicæa colligere.

Si è centro Cometæ in locis quatuor obſervatis, ad planum Eclipticæ demittantur totidem perpendicula; ſintque A, B, C, D. puncta in plano illo in quæ perpendicula incidunt; Per puncta illa agatur recta A D, & hæc ſecabitur à perpendiculis in eadem ratione cum linea quam Cometa motu ſuo deſcribit, hoc eſt, ita ut ſit A B ad A C ut tempus inter primam & ſecundam obſervationem ad tempus inter primam ac tertiam, & A B ad A D ut tempus illud inter primam & ſecundam obſervationem ad tempus inter primam & quartam. Ex obſervationibus itaque dantur rationes linearum A B, A C, A D, ad invicem. TAB. VII. Fig. 8.

Inſuper in eodem Eclipticæ plano ſit S Sol, EH arcus lineæ

Eclipti-

Eclipticæ in qua terra movetur, E, F, G, H loca quatuor terræ temporibus obſervationum, E locus primus, F ſecundus, G tertius, H quartus. Jungantur AE, BF, CG, DH, & producantur donec tres poſteriores priorem ſecent in I, K & L, BF in I, CG in K, DH in L. Et erunt anguli AIB, AKC, ALD differentiæ longitudinum obſervatarum Cometæ; AIB differentia longitudinum loci primi Cometæ & ſecundi; AKC differentia longitudinum loci primi ac tertii; & ALD differentia longitudinum loci primi & quarti. Dantur itaque ex obſervationibus anguli AIB, AKC, ALD.

Junge SE, SF, EF; & ob data puncta S, E, F, datumque angulum ESF, dabitur angulus SEF. Datur etiam angulus SEA, utpote differentia longitudinis Cometæ & Solis tempore obſervationis primæ. Quare ſi complementum ejus ad duos rectos nempe angulum SEI, addas angulo SEF, dabitur angulus IEF. Trianguli igitur IEF dantur anguli una cum latere EF, adeoque datur etiam latus IE. Et ſimili argumento dantur KE & LE. Dantur igitur poſitione lineæ quatuor AI, BI, CK, DL, adeoque Problema huc redit, ut lineis quatuor poſitione datis, quintam inveniamus quæ ab his in data ratione ſecabitur.

Demiſſis ad AI perpendiculis BM, CN, DO, ob datum angulum AIB datur ratio BM ad MI. Eſt & BM ad CN in data ratione BA ad CA, & ob datum angulum CKN datur ratio CN ad KN. Quare datur etiam ratio BM ad KN; & inde ratio quoque BM ad MI−KN, hoc eſt ad MN+IK. Cape P ad IK ut eſt AB ad BC, & cum ſit MA ad MN in eadem ratione, erit etiam P+MA ad IK+MN in eadem ratione; hoc eſt in ratione data. Quare datur ratio BM ad P+MA. Et ſimili argumento ſi capiatur Q ad IL in ratione AB ad BD, dabitur ratio BM ad Q+MA. Et proinde ratio BM ad ipſorum P+MA & Q+MA differentiam, quoque dabitur. At differentia illa, nempe P−Q vel Q−P, datur. Et proinde dabitur BM. Dato autem BM, ſimul dantur P+MA, & MI, & inde MA, ME, AE, & angulus EAB.

His inventis, erige ad A lineam plano Eclipticæ perpendicularem,

rem, quæ ſit ad lineam EA ut tangens latitudinis Cometæ in obſervatione prima ad radium, & iſtius perpendicularis terminus erit locus centri Cometæ in obſervatione prima. Unde datur diſtantia Cometæ à Terra tempore illius obſervationis. Et eodem modo ſi è puncto B erigatur perpendicularis quæ ſit ad lineam BF ut tangens latitudinis Cometæ in obſervatione ſecunda ad radium, habebitur locus centri Cometæ in obſervatione illa ſecunda. Et acta linea à loco primo ad locum ſecundum, ea eſt in qua Cometa per Cœlum trajicit.

PROB. LVII.

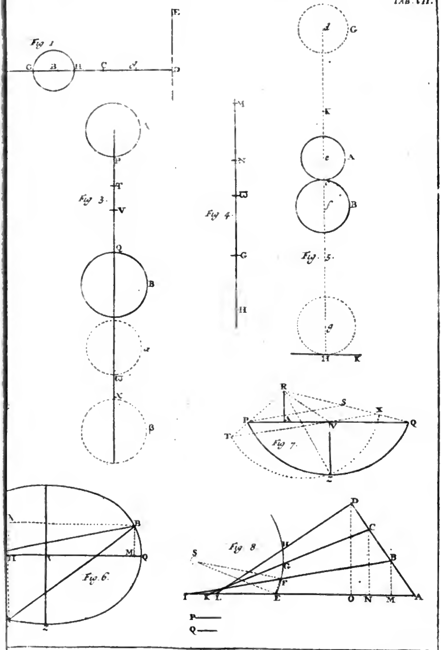
Si angulus datus CAD circa punctum angulare A, poſitione datum, & angulus datus CBD circa punctum angulare B, poſitione datum, ea lege circumvolvantur ut crura AD, BD ad rectam poſitione datam EF ſeſe ſemper interſecent: Invenire lineam illam curvam quam reliquorum crurum AC, BC interſectio C deſcribit. Tab. VIII. Fig. 1.

Produc CA ad d ut ſit $Ad=AD$, & CB ad δ ut ſit $B\delta=BD$. Fac angulum Ade æqualem angulo ADE, & angulum $B\delta f$ æqualem angulo BDF, & produc AB utrinque donec ea occurrat de & δf in e & f. Produc etiam ed ad G, ut ſit $dG=\delta f$, & à puncto C ad lineam AB ipſi ed parallelam age CH, & ipſi $f\delta$ parallelam CK. Et concipiendo lineas eG, $f\delta$ immobiles manere dum anguli CAD, CBD lege præſcripta circa polos A & B volvantur, ſemper erit Gd æqualis ipſi $f\delta$, & triangulum CHK dabitur ſpecie. Dic itaque $Ae=a$, $eG=b$, $Bf=c$, $AB=m$, $BK=x$, & $CK=y$. Et erit $BK.CK::Bf.f\delta$. Ergo $f\delta=\frac{cy}{x}=Gd$. Aufer hoc de Ge, & reſtabit $ed=b-\frac{cy}{x}$. Cum detur ſpecie triangulum CKH, pone $CK.CH::d.e$; & $CH.HK::e.f$, & erit

 CH

$CH=\frac{ey}{d}$, & $HK=\frac{fy}{d}$. Adeoque $AH=m-x-\frac{fy}{d}$. Eſt autem $AH.HC::Ae.ed$, hoc eſt $m-x-\frac{f}{d}y.\frac{ey}{d}::a.b-\frac{cy}{x}$. Ergo ducendo media & extrema in ſe, fiet $mb-\frac{mcy}{x}-bx+cy-\frac{bf}{d}y+\frac{cfyy}{dx}=\frac{aey}{d}$. Duc omnes terminos in dx, eoſque in ordinem redige; & fiet $fcyy-aexy\begin{matrix}+dc\\-fb\end{matrix}-dcmy-bdxx+bdmx=0$. Ubi cum incognitæ quantitates x & y, ad duas tantum dimenſiones aſcendant, patet curvam lineam quam punctum C deſcribit eſſe Conicam Sectionem. Pone $\frac{ae+fb-dc}{c}=2p$, & fiet $yy=\frac{2p}{f}xy+\frac{dm}{f}y+\frac{bd}{fc}xx-\frac{bdm}{fc}x$. Et extracta radice $y=\frac{p}{f}x+\frac{dm}{2f}\pm\sqrt{\frac{pp}{ff}xx+\frac{bd}{fc}xx+\frac{pdm}{ff}x-\frac{bdm}{fc}x+\frac{ddmm}{4ff}}$. Unde colligitur Curvam Hyperbolam eſſe ſi ſit $\frac{bd}{fc}$ affirmativum, vel negativum & minus quam $\frac{pp}{ff}$; Parabolam ſi ſit $\frac{bd}{fc}$ negativum & æquale $\frac{pp}{ff}$; Ellipſin vel circulum ſi ſit $\frac{bd}{fc}$ & negativum & majus quam $\frac{pp}{ff}$. Q. E. I.

PROB.



Digitized by Google

PROB. LVIII.

Parabolam deſcribere quæ per data quatuor puncta tranſibit.

Sint puncta illa data A, B, C, D. Junge AB & eam biſeca in E. Et per E age rectam aliquam VE, quam concipe diametrum eſſe Parabolæ, puncto V exiſtente vertice ejus. Junge AC ipſique AB parallelam age DG occurrentem AC in G. Dic $AB=a$, $AC=b$, $AG=c$, $GD=d$. In AC cape AP cujuſvis longitudinis & à P age PQ parallelam AB, & concipiendo Q punctum eſſe Parabolæ; dic $AP=x$, $PQ=y$, & æquationem quamvis ad Parabolam aſſume quæ relationem inter AP & PQ exprimat. Ut quod ſit Tab. VIII. Fig. 2.

$y=e+fx\pm\sqrt{gg+hx}$.

Jam ſi ponatur AP ſive $x=0$, puncto P incidente in ipſum A, fiet PQ ſive $y=0$, ut & $=-AB$. Scribendo autem in æquatione aſſumpta 0 pro x, fiet $y=e\pm\sqrt{gg}$, hoc eſt $=e\pm g$. Quorum valorum ipſius y major $e+g$ eſt $=0$, minor $e-g=-AB$ ſive $-a$. Ergo $e=-g$ & $e-g$, hoc eſt $-2g=-a$, ſive $g=\frac{1}{2}a$. Atque adeo vice æquationis aſſumptæ habebitur hæc $y=-\frac{1}{2}a+fx\pm\sqrt{\frac{1}{4}aa+hx}$.

Adhæc ſi ponatur AP ſive $x=AC$ ita ut punctum P incidat in C, fiet iterum $PQ=0$. Pro x igitur in æquatione noviſſima ſcribe AC ſive b, & pro y, 0, & fiet $0=-\frac{1}{2}a+fb+\sqrt{\frac{1}{4}aa+hb}$, ſive $\frac{1}{2}a-fb=\sqrt{\frac{1}{4}aa+hb}$; & partibus quadratis $-afb+ffbb=hb$. Sive $ffb-fa=h$. Atque ita vice aſſumptæ æquationis habebitur iſthæc $y=-\frac{1}{2}a+fx\pm\sqrt{\frac{1}{4}aa+ffbx-fax}$.

Inſuper ſi ponatur AP ſive $x=AG$ ſive c, fiet PQ ſive $y=-GD$ ſive $-d$. Quare pro x & y in æquatione noviſſima ſcribe c & $-d$, & fiet $-d=-\frac{1}{2}a+fc-\sqrt{\frac{1}{4}aa+ffbc-fac}$. Sive $\frac{1}{2}a-d-fc=\sqrt{\frac{1}{4}aa+ffbc-fac}$. Et partibus quadratis $-ad-fac+dd$

$+2dcf+ccff=ffbc-fac$. Et æquatione ordinata & reducta $ff=\frac{2d}{b-c}f+\frac{dd-ad}{bc-cc}$. Pro $b-c$ hoc eſt pro GC ſcribe k, & æquatio illa fiet $ff=\frac{2d}{k}f+\frac{dd-ad}{kc}$. Et extracta radice $f=\frac{d}{k}\pm\sqrt{\frac{ddc+ddk-adk}{kkc}}$. Invento autem f, æquatio ad Parabolam, viz. $y=-\frac{1}{2}a+fx\pm\sqrt{\frac{1}{4}aa+ffbx-fax}$, plene determinatur: Cujus itaque conſtructione Parabola etiam determinabitur. Conſtructio autem ejus hujuſmodi eſt. Ipſi BD parallelam age CH occurrentem DG in H. Inter DG ac DH cape mediam proportionalem DK, & ipſi CK parallelam age EI biſecantem AB in E, & occurrentem DG in I. Dein produc IE ad V, ut ſit EV.EI::EBq.DIq−EBq, & erit V vertex, VE diameter, & $\frac{\text{BE}q}{\text{VE}}$ latus rectum Parabolæ quæſitæ.

PROB. LIX.

Conicam ſectionem per data quinque puncta deſcribere.

TAB. VIII. Fig. 3. Sint puncta iſta A, B, C, D, E. Junge AC, BE ſe mutuo ſecantes in H. Age DI parallelam BE, & occurrentem AC in I. Item EK parallelam AC, & occurrentem DI productæ in K. Produc ID ad F, & EK ad G; ut ſit AHC.BHE::AIC.FID::EKG.FKD, & erunt puncta F ac G in conica ſectione, ut notum eſt. Hoc tamen obſervare debebis, quod ſi punctum H cadit inter puncta omnia A, C & B, E, vel extrà ea omnia, punctum I cadere debebit vel inter puncta omnia A, C & F, D, vel extra ea omnia; & punctum K inter omnia D, F & E, G, vel extra ea omnia. At ſi punctum H cadit inter duo puncta A, C, & extra alia duo B, E vel inter illa duo B, E, & extra altera duo A, C, debebit punctum I cadere inter duo punctorum A, C & F, D, & extra alia duo eorum; & ſimiliter punctum K debebit cadere

dere inter duo punctorum D, F & E, G, & extra alia duo eorum: Id quod fiet capiendo IF, KG, ad hanc vel illam partem punctorum I, K, pro exigentia problematis. Inventis punctis F ac G, biſeca AC, EG in N & O; item BE, FD in L & M. Junge NO, LM ſe mutuo ſecantes in R; & erunt LM & NO diametri conicæ ſectionis, R centrum ejus, & BL, FM ordinatim applicatæ ad diametrum LM. Produc LM hinc inde ſi opus eſt ad P & Q ita ut ſit $BLq.FMq::PLQ.PMQ$, & erunt P & Q vertices Conicæ ſectionis & PQ latus transverſum. Fac $PLQ.LBq::PQ.T$. Et erit T latus rectum. Quibus cognitis cognoſcitur Figura.

Reſtat tantum ut doceamus quomodo LM hinc inde producenda ſit ad P & Q ita ut fiat $BLq.FMq::PLQ.PMQ$. Nempe PLQ ſive $PL\times LQ$ eſt $\overline{PR-LR}\times\overline{PR+LR}$, nam PL eſt $PR-LR$, & LQ eſt $RQ+LR$ ſeu $PR+LR$. Porro $\overline{PR-LR}\times\overline{PR+LR}$ multiplicando fit $PRq-LRq$. Et ad eundem modum PMQ eſt $\overline{PR+RM}\times\overline{PR-RM}$, ſeu $PRq-RMq$. Ergo $BLq.FMq::PRq-LRq.PRq-RMq$, & dividendo $BLq-FMq.FMq::RMq-LRq.PRq-RMq$. Quamobrem cum dentur $BLq-FMq$, FMq, & $RMq-LRq$ dabitur $PRq-RMq$. Adde datum RMq, & dabitur ſumma PRq, adeoque & latus ejus PR, cui QR æqualis eſt.

PROB. LX.

Conicam ſectionem deſcribere quæ tranſibit per quatuor data puncta, & in uno iſtorum punctorum continget rectam poſitione datam.

Sint puncta quatuor data A, B, C, D, & recta poſitione data AE, quam conica ſectio contingat in puncto A. Junge duo quævis puncta D, C, & DC, producta ſi opus eſt, occurrat tangenti in E. Per quartum punctum B ipſi DC age parallelam BF, quæ occurrat eidem tangenti in F. Item tangenti parallelam age DI, quæ occurrat ipſi BF in I. In FB, DI, ſi opus eſt productis, TAB. VIII. Fig. 4.

cape

Digitized by Google

cape FG, HI ejus longitudinis ut ſit $AEq.CED::AFq.BFG::DIH.BIG$. Et erunt puncta G & H in Conica ſectione, ut notum eſt: Si modo capias FG, IH ad legitimas partes punctorum F & I, juxta regulam in ſuperiore Problemate traditam. Biſeca BG, DC, DH in K, L & M. Junge KL, AM ſe mutuo ſecantes in O, & erit O centrum, A vertex, & HM ordinatim applicata ad ſemidiametrum AO. Quibus cognitis cognoſcitur figura.

PROB. LXI.

Conicam ſectionem deſcribere quæ tranſibit per tria data puncta, & in duobus iſtorum punctorum continget rectas poſitione datas.

TAB. VIII. Fig. 5.

Sint puncta illa data A, B, C, Tangentes AD, BD ad puncta A & B, D communis interſectio tangentium. Biſeca AB in E. Age DE, & produc eam donec in F occurrat CF actæ parallelæ AB: & erit DF diameter, & AE, CF ordinatim applicatæ ad diametrum. Produc DF ad O, & in DO cape OV mediam proportionalem inter DO & EO ea lege ut ſit etiam $AEq.CFq::VE\times\overline{VO+OE}.VF\times\overline{VO+OF}$; & erit V vertex, & O centrum Figuræ. Quibus cognitis Figura ſimul cognoſcitur. Eſt autem $VE=VO-OE$, adeoque $VE\times\overline{VO+OE}=\overline{VO-OE}\times\overline{VO+OE}=VOq-OEq$. Præterea quia VO media proportionalis eſt inter DO & EO erit $VOq=DOE$, adeoque $VOq-OEq=DOE-OEq=DEO$. Et ſimili argumento erit $VF\times\overline{VO+OF}=VOq-OFq=DOE-OFq$. Ergo $AEq.CFq::DEO.DOE-OFq$. Eſt $OFq=EOq-2FEO+FEq$ Adeoque $DOE-OFq=DOE-OEq+2FEO-FEq=DEO+2FEO-FEq$. Et $AEq.CFq::DEO.DEO+2FEO-FEq::DE.DE+2FE-\frac{FEq}{EO}$. Datur ergo $DE+2FE-\frac{FEq}{EO}$. Aufer hoc de dato $DE+2FE$, & reſtabit

Digitized by Google

bit $\frac{FEq}{EO}$ datum. Sit illud N; & erit $\frac{FEq}{N} = EO$, adeoque dabitur EO. Dato autem EO ſimul datur VO medium proportionale inter DO & EO.

Hoc modo per Theoremata quædam Apollonii ſatis expedite reſolvuntur hæc problemata: Quæ tamen ſine iſtis Theorematibus per Algebram ſolam reſolvi poſſent. Ut ſi proponatur primum trium noviſſimorum Problematum: Sint puncta quinque data A, B, C, D, E, per quæ Conica ſectio tranſire debet. Junge duo quævis AC, & alia duo BE rectis ſe ſecantibus in H. Ipſi BE parallelam age DI occurrentem AC in I; ut & aliam quamvis rectam KL occurrentem AC in K, & conicæ ſectioni in L. Et finge Conicam ſectionem datam eſſe, ita ut cognito puncto K ſimul cognoſcatur punctum L. Et poſito $AK = x$, & $KL = y$, ad exprimendam relationem inter x & y, aſſume quamvis æquationem quæ Conicas ſectiones generaliter exprimit, puta hanc $a + bx + cxx + dy + exy + yy = 0$, ubi a, b, c, d, e denotant quantitates determinatas cum ſignis ſuis, x vero & y quantitates indeterminatas. Si jam quantitates determinatas a, b, c, d, e invenire poſſumus, habebimus Conicam ſectionem. Fingamus ergo punctum L ſucceſſive incidere in puncta A, C, B, E, D, & videamus quid inde ſequetur. Si ergo punctum L incidit in punctum A, erit in eo caſu AK & KL, hoc eſt x & y nihil. Proinde æquationis omnes termini præter a evaneſcent, & reſtabit $a = 0$. Quare delendum eſt a in æquatione illa, & cæteri termini $bx + cxx + dy + exy + yy$ erunt $= 0$. Porro ſi L incidit in C erit AK ſeu $x = AC$, & LK ſeu $y = 0$. Pone ergo $AC = f$, & ſubſtituendo f pro x, & 0 pro y æquatio ad curvam $bx + cxx + dy + exy + yy = 0$, evadet $bf + cff = 0$, ſeu $b = -cf$. Et in æquatione illa ſcripto $-cf$ pro b evadet $-cfx + cxx + dy + exy + yy = 0$. Adhæc ſi punctum L incidit in punctum B, erit AK ſeu $x = AH$, & KL ſeu $y = BH$. Pone ergo $AH = g$ & $BH = h$, & perinde ſcribe g pro x & h pro y, & æquatio $-cfx + cxx$, &c. evadet $-cfg + cgg + dh + egh + hh = 0$. Quod ſi punctum L incidit in E erit $AK = AH$ ſeu $x = g$, & KL ſeu $y = HE$. Pro HE ergo ſcribe $-k$ cum ſigno negativo quia HE jacet ad contrarias par-

Tab. VIII. Fig. 6.

tes lineæ AC, & ſubſtituendo g pro x & $-k$ pro y, æquatio $-cfx+cxx$, &c evadet $-cfg+cgg-dk-egk+kk=0$. Aufer hoc de ſuperiori æquatione $-cfg+cgg+dh+egh+hh$, & reſtabit $dh+egh+hh+dk+egk-kk=0$. Divide hoc per $h+k$, & fiet $d+eg+h-k=0$. Hoc ductum in h aufer de $-cfg+cgg+dh+egh+hh=0$, & reſtabit $-cfg+cgg+hk=0$, ſeu $\frac{hk}{-gg+fg}=c$. Denique ſi punctum L incidit in punctum D, erit AK ſeu $x=$AI, & KL ſeu y ID. Quare pro AI ſcribe m & pro ID n, & perinde pro x & y ſubſtitue m & n, & æquatio $-cfx+cxx$, &c. evadet $-cfm+cmm+dn+emn+nn=0$. Hoc divide per n & fiet $\frac{-cfm+cmm}{n}+d+em+n=0$. Aufer $d+eg+h-k=0$, & reſtabit $\frac{-cfm+cmm}{n}+em-eg+n-h+k=0$. Sive $\frac{cmm-cfm}{n}+n-h+k=eg-em$. Jam vero ob data puncta A, B, C, D, E dantur AC, AH, AI, BH, EH, DI, hoc eſt f, g, m, h, k, n. Atque adeo per æquationem $\frac{hk}{fg-gg}=c$ datur c. Dato autem c, per æquationem $\frac{cmm-cfm}{n}+n-h+k=eg-em$ datur $eg-em$. Divide hoc datum per datum $g-m$, & emerget datum e. Quibus inventis æquatio $d+eg+h-k=0$, ſeu $d=k-h-eg$ dabit d. Et his cognitis ſimul determinatur æquatio ad quæſitam Conicam ſectionem $cfx=cxx+dy+exy+yy$. Et ex ea æquatione per methodum Carteſii determinabitur Conica ſectio.

Quod ſi quatuor A, B, C, E, & poſitio rectæ AF quæ tangit Conicam ſectionem ad unum iſtorum punctorum A daretur, poſſet Conica ſectio ſic facilius determinari. Inventis ut ſupra æquationibus $cfx=cxx+dy+exy+yy$, $d=k-h-eg$, & $c=\frac{hk}{fg-gg}$, concipe tangentem AF occurrere rectæ EH in F, dein punctum L moveri per perimetrum figuræ CDE donec incidat in punctum A: & ultima ratio ipſius LK ad AK erit ratio FH ad AH, ut con-

tem-

templanti figuram conſtare poteſt. Dic vero $FH=p$, & in hoc caſu ubi LK eſt ad AK in ultima ratione erit $p.g::y,x$, ſive $\frac{gy}{p}=x$. Quare pro x in æquatione $cfx=cxx+dy+exy+yy$, ſcribe $\frac{gy}{p}$, & orietur $\frac{cfgy}{p}=\frac{cggyy}{pp}+dy+\frac{egyy}{p}+yy$. Divide omnia per y & emerget $\frac{cfg}{p}=\frac{cggy}{pp}+d+\frac{egy}{p}+y$. Jam quia ſupponitur punctum L incidere in punctum A, adeoque KL ſeu y infinite parvum vel nihil eſſe, dele terminos qui per y multiplicantur, & reſtabit $\frac{cfg}{p}=d$. Quare fac $\frac{bk}{fg-gg}=c$ dein $\frac{cfg}{p}=d$, denique $\frac{k-b-d}{g}=e$, & inventis $c, d,$ & e, æquatio $cfx=cxx+dy+exy+yy$ determinabit conicam ſectionem.

Si denique tria tantum puncta A, B, C dentur, una cum poſitione duarum rectarum AT, CT quæ tangunt Conicam ſectionem in duobus iſtorum punctorum A & C, obtinebitur ut ſupra ad Conicam ſectionem æquatio hæc $cfx=cxx+dy+exy+yy$. Deinde ſi ſupponatur ordinatam KL parallelam eſſe tangenti AT, & concipiatur eam produci donec rurſus occurrat Conicæ ſectioni in M, & lineam illam LM accedere ad tangentem AT donec cum ea conveniat ad A; ultima ratio linearum KL & KM ad invicem erit ratio æqualitatis, ut contemplanti figuram conſtare poteſt. Quamobrem in illo caſu exiſtentibus KL & KM, ſibi invicem æqualibus, hoc eſt duobus valoribus ipſius y (affirmativo ſcilicet KL, & negativo KM) æqualibus, debent æquationis $cfx=cxx+dy+exy+yy$ termini illi in quibus y eſt imparis dimenſionis, hoc eſt termini $+dy+exy$ reſpectu termini yy in quo y eſt paris dimenſionis, evaneſcere. Aliter enim duo valores ipſius y, affirmativus & negativus, æquales eſſe non poſſunt. Et in illo quidem caſu AK infinite minor erit quam LK, hoc eſt x quam y, proinde & terminus exy quam terminus yy. Atque adeo infinite minor exiſtens, pro nihilo habendus erit. At terminus dy reſpectu termini yy, non evaneſcet ut oportet, ſed eo major erit niſi

TAB. VIII. Fig. 7

Z 2 d

d ſupponatur eſſe nihil. Delendus eſt itaque terminus dy, & ſic reſtabit $cfx=cxx+exy+yy$, æquatio ad conicam ſectionem. Concipiantur jam tangentes AT, CT ſibi mutuo occurrere in T, & punctum L accedere ad punctum C donec in illud incidat. Et ultima ratio ipſius KL ad KC erit AT ad AC. KL erat y; AK, x; & AC, f; atque adeo KC, $f-x$. Dic AT$=g$, & ultima ratio y ad $f-x$, erit ea quæ eſt g ad f. Æquatio $cfx=cxx+exy+yy$, ſubducto utrobique cxx fit $cfx-cxx=exy+yy$, hoc eſt, $\overline{f-x}$ in $cx=y$ in $\overline{ex+y}$. Ergo eſt $y.f-x::cx.ex+y$, adeoque $g.f::cx.ex+y$. At puncto L incidente in C, fit y nihil. Ergo $g.f::cx.ex$. Divide poſteriorem rationem per x, & evadet $g.f::c.e$, & $\frac{cf}{g}=e$. Quare ſi in æquatione $cfx=cxx+exy+yy$, ſcribas $\frac{cf}{g}$ pro e, fiet $cfx=cxx+\frac{cf}{g}xy+yy$, æquatio ad conicam ſectionem. Denique ipſi KL ſeu AT à dato puncto B per quod Conica ſectio tranſire debet age parallelam BH occurrentem AC in H, & concipiendo LK accedere ad BH donec cum ea coincidat, in eo caſu erit AH$=x$, & BH$=y$. Dic ergo datam AH$=m$, & datam BH$=n$, & perinde pro x & y in æquatione $cfx=cxx+\frac{cf}{g}xy+yy$, ſcribe m & n, & orietur $cfm=cmm+\frac{cf}{g}mn+nn$. Aufer utrobique $cmm+\frac{cf}{g}mn$, & fiet $cfm-cmm-\frac{cf}{g}mn=nn$. Pone $f-m-\frac{fn}{g}=s$, & erit $csm=nn$. Divide utramque partem æquationis per sm, & orietur $c=\frac{nn}{sm}$. Invento autem c, determinata habetur æquatio ad Conicam ſectionem $cfx=cxx+\frac{cf}{g}xy+yy$. Et inde per methodum Carteſii Conica ſectio datur & deſcribi poteſt.

Atque

Digitized by Google

Atque hactenus varia evolvi Problemata. In ſcientiis enim addiſcendis proſunt exempla magis quam præcepta. Qua de cauſa in his fuſius expatiatus ſum. Sed & aliqua quæ inter ſcribendum occurrebant immiſcui ſine Algebra ſoluta, ut inſinuarem in problematibus, quæ prima fronte difficilia videntur, non ſemper ad Algebram recurrendum eſſe. Sed tempus eſt jam æquationum reſolutionem docere. Nam poſtquam Problema ad æquationem deductum eſt, radices illius æquationis quæ quantitates ſunt Problemati ſatisfacientes extrahere oportebit.

Quomodo Æquationes reſolvendæ ſunt.

Poſtquam igitur in Quæſtionis alicujus ſolutione ad æquationem perventum eſt, & æquatio illa debite ordinata eſt & reducta; ubi quantitates quæ per ſpecies deſignantur & pro datis habentur, revera dantur in numeris, pro ipſis ſubſtituendi ſunt numeri illi in æquatione, & habebitur æquatio numeralis, cujus radix extracta tandem ſatisfaciet Quæſtioni. Ut ſi in ſectione anguli in quinque partes æquales ſumendo r pro radio circuli, q pro ſubtenſa complementi anguli propoſiti ad duos rectos, & x pro ſubtenſa complementi quintæ partis anguli illius perveniſſem ad hanc æquationem $x^5 - 5rrx^3 + 5r^4x - r^4q = 0$. Ubi in caſu aliquo particulari dantur in numeris radius r, & linea dati anguli complementum ſubtendens q; ut quod radius ſit 10 & ſubtenſa 3; ſubſtituo numeros illos in æquatione pro r & q, & provenit æquatio numeralis $x^5 - 500x^3 + 50000x - 30000 = 0$, cujus radix tandem extracta erit x, ſeu linea complementum quintæ partis anguli illius dati ſubtendens.

De Natura Radicum Æquationis.

Radix vero numerus eſt qui ſi in æquatione pro litera vel ſpecie radicem ſignificante ſubſtituatur, efficiet omnes terminos evaneſcere.

Sic æquationis $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, unitas eſt radix quoniam ſcripta pro x producit $1 - 1 - 19 + 49 - 30$, hoc eſt nihil. Sed æquationis ejuſdem plures eſſe poſſunt radices. Nam ſi in hac eadem

Digitized by Google

æquatione $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, pro x ſcribas numerum 2, & pro poteſtatibus x ſimiles poteſtates numeri 2, producetur $16 - 8 - 76 + 98 - 30$, hoc eſt nihil. Atque ita ſi pro x ſcribas numerum 3 vel numerum negativum -5, utroque caſu producetur nihil, terminis affirmativis & negativis in hiſce quatuor caſibus ſe mutuo deſtruentibus: Proinde cum numerorum 1, 2, 3. & -5, quilibet ſcriptus in æquatione pro x impleat conditionem ipſius x, efficiendo ut termini omnes æquationis conjunctim æquentur nihilo, erit quilibet eorum radix æquationis.

Et ne mireris eandem æquationem habere poſſe *plures radices*, ſciendum eſt *plures eſſe poſſe ſolutiones ejuſdem Problematis.*

Ut ſi circulorum duorum datorum quæreretur *interſectio*; *duæ* ſunt eorum interſectiones, atque adeo quæſtio admittit *duo reſponſa*; & perinde æquatio interſectionem determinans habebit *duas radices* quibus interſectionem utramque determinet, *ſi modo nihil in datis ſit quo reſponſum ad unum interſectionem determinetur.*

Tab. VIII. Fig. 8. Sic & ſi arcus APB pars quinta AP invenienda eſſet, quamvis animum forte advertas tantum ad arcum APB, tamen æquatio qua quæſtio ſolvetur determinabit quintam partem arcuum omnium qui terminantur ad puncta A & B; nempe quintam partem arcuum ASB, APBSAPB. ASBPASB, & APBSAPBSAPB, æque ac quintam partem arcus APB; quæ quintæ partes ſi dividas totam circumferentiam in æquales quinque partes PQ, QR, RS, ST, TP, erunt AT, AQ, ATS, AQR. Quoniam igitur quærendo quintas partes arcuum quos recta AB ſubtendit ad caſus omnes determinandos circumferentia tota ſecari debet in quinque punctis P, Q, R, S, T, ideo æquatio ad omnes caſus determinandos habebit radices quinque. Nam quintæ partes horum omnium arcuum pendent ab iiſdem datis, & per ejuſdem generis calculum inveniuntur; ita ut in eandem ſemper æquationem incideris ſive quæras quintam partem Arcus APB, ſive quintam partem Arcus ASB, ſive alterius cujuſvis ex arcubus quintam partem. Unde ſi æquatio qua quinta pars Arcus APB determinatur non haberet plures radices quam unam, dum quærendo quintam partem Arcus ASB incidimus in eandem illam æquationem, ſequeretur majorem hunc arcum habere eandem

quin-

quintam partem cum priore qui minor eſt, eo quod ſubtenſa ejus per eandem æquationis radicem exprimitur. *In omni igitur problemate neceſſe eſt æquationem qua reſpondetur tot habere radices, quot ſunt quæſitæ quantitatis caſus diverſi ab iiſdem datis pendentes & eadem argumentandi ratione determinandi.*

Poteſt vero æquatio tot habere radices quot ſunt dimenſiones ejus, & non plures.

Sic æquatio $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, quatuor habet radices $1, 2, 3,$ & -5; non autem plures. Nam quilibet ex his numeris ſcriptus in æquatione pro x efficiet terminos omnes ſe mutuo deſtruere ut dictum eſt; præter hos vero nullus eſt numerus cujus ſubſtitutione hoc eveniet.

Cæterum numerus & natura radicum ex generatione æquationis optime intelligetur.

Ut ſi ſcire vellemus quomodo generetur æquatio cujus radices ſint $1, 2, 3,$ & -5, ſupponendum erit x ambigue ſignificare numeros illos, ſeu eſſe $x=1$, $x=2$, $x=3$, & $x=-5$, vel quod perinde eſt, $x-1=0$, $x-2=0$, $x-3=0$, & $x+5=0$; Et multiplicando hæc in ſe, prodibit multiplicatione $x-1$, in $x-2$, hæc æquatio $xx-3x+2=0$, quæ duarum eſt dimenſionem ac duas habet radices 1 & 2. Et hujus multiplicatione in $x-3$ prodibit $x^3-6xx+11x-6=0$, æquatio trium dimenſionum totidemque radicum, quæ iterum multiplicata per $x+5$ fit $x^4-x^3-19xx+49x-30=0$, ut ſupra. Cum igitur hæc æquatio generetur ex quatuor factoribus, $x-1$, $x-2$, $x-3$, & $x+5$, in ſe continuo ductis, ubi factorum aliquis nihil eſt, quod ſub omnibus fit nihil erit; ubi vero horum nullus nihil eſt, quod ſub omnibus continetur nihil eſſe non poteſt. Hoc eſt, non poteſt $x^4-x^3-19xx+49x-30$, eſſe nihilo æquale ut oportet, niſi his quatuor caſibus ubi eſt $x-1=0$, vel $x-2=0$, vel $x-3=0$, vel denique $x+5=0$, proinde ſoli numeri $1, 2, 3,$ & -5 valere poſſunt x ſeu radices eſſe æquationis. Et ſimile eſt ratiocinium de omnibus æquationibus. Nam tali multiplicatione imaginari poſſumus omnes generari, quamvis factores ab invicem ſecernere ſolet eſſe difficillimum, & ipſum eſt quod æquationem reſolvere & radices extrahere. Habitis enim radicibus habentur factores.

Radi-

Radices vero ſunt duplices affirmativæ *ut in allato exemplo* 1, 2, & 3, *&* negativæ *ut* -5. *Ex his vero aliquæ non raro evadunt* impoſſibiles.

Sic æquationis $xx - 2ax + bb = 0$, radices duæ quæ ſunt $a + \sqrt{aa - bb}$, & $a - \sqrt{aa - bb}$ reales quidem ſunt ubi aa majus eſt quam bb, at ubi aa minus eſt quam bb, evadunt impoſſibiles eo quod $aa - bb$ tunc evadet negativa quantitas, & negativæ quantitatis radix quadratica eſt impoſſibilis. Omnis enim radix poſſibilis ſive affirmativa ſit, ſive negativa, ſi per ſeipſam multiplicetur, producet quadratum affirmativum; proinde impoſſibilis erit quæ quadratum negativum producere debet. Eodem argumento colligitur æquationem $x^3 - 4xx + 7x - 6 = 0$, unam quidem realem radicem habere quæ eſt 2, duas vero impoſſibiles, $1 + \sqrt{-2}$, & $1 - \sqrt{-2}$. Nam quælibet ex his 2, $1 + \sqrt{-2}$, & $1 - \sqrt{-2}$ ſcripta in æquatione pro x efficiet omnes ejus terminos ſe mutuo deſtruere; ſunt vero $1 + \sqrt{-2}$, & $1 - \sqrt{-2}$ numeri impoſſibiles, eo quod extractionem radicis quadraticæ ex numero negativo -2 præſupponant.

Æquationum vero radices ſæpe impoſſibiles eſſe æquum eſt ne caſus problematum, qui ſæpe impoſſibiles ſunt, exhibeant poſſibiles.

Ut ſi rectæ & circuli interſectio determinanda eſſet, & pro circuli radio & rectæ à centro ejus diſtantia ponantur literæ duæ; ubi æquatio interſectionem definiens habetur, ſi pro litera deſignante diſtantiam rectæ à centro ponatur numerus minor radio, interſectio poſſibilis erit; ſin major, fiet impoſſibilis; & æquationis radices duæ quæ interſectiones duas determinant, debent eſſe perinde poſſibiles vel impoſſibiles ut rem ipſam vere exprimant. Atque ita ſi circulus CDEF, & Ellipſis ACBF ſe mutuo ſecent in punctis C, D, E, F, & ad rectam aliquam poſitione datam AB, demittantur perpendicula CG, DH, EI, FK, & quærendo longitudinem alicujus è perpendiculis, perveniatur tandem ad æquationem, æquatio illa ubi circulus ſecat Ellipſin in quatuor punctis habebit quatuor radices reales quæ erunt quatuor illa perpendicula. Quod ſi circuli radius manente centro ejus minuatur donec punctis E & F coaleſcentibus circulus tandem tangat Ellipſin, ex radicibus duæ illæ quæ perpendicula EI & FK jam coincidentia exprimunt evadent æquales. Et

TAB. VIII. Fig. 9.

ſi

ſi circulus adhuc minuatur ut Ellipſin in puncto E F ne quidem tangat ſed ſecet tantum in alteris duobus punctis C, D, tunc ex quatuor radicibus duæ illæ quas perpendicula E I, F K, jam facta impoſſibilia, exprimebant, fient una cum perpendiculis illis impoſſibiles. Et hoc modo in omnibus æquationibus augendo vel minuendo terminos earum, ex inæqualibus radicibus duæ primo æquales deinde impoſſibiles evadere ſolent. Et inde fit quod radicum impoſſibilium numerus ſemper ſit par.

Sunt tamen radices æquationum aliquando poſſibiles ubi Schema impoſſibiles exhibet. Sed hoc fit ob limitationem aliquam in Schemate quod ad æquationem nil ſpectat.

Ut ſi in ſemicirculo A D B datis diametro A B, & linea inſcripta A D, demiſſoque perpendiculo D C, quærerem diametri ſegmentum A C, foret $\frac{ADq}{AB} = AC$. Et per hanc æquationem A C realis exhibetur quantitas ubi linea inſcripta A D major eſt quam diameter A B; per Schema vero A C tunc evadit impoſſibilis. Nimirum in ſchemate linea A D ſupponitur inſcribi in circulo, atque adeo diametro circuli major eſſe non poteſt; in æquatione vero nihil eſt quod à conditione illa pendeat. Ex hac ſola linearum conditione colligitur æquatio, quod ſint A B, A D, & A C continue proportionales. Et quoniam æquatio non complectitur omnes conditiones ſchematis non neceſſe eſt ut omnium conditionum teneatur limitibus. Quicquid amplius eſt in ſchemate quam in æquatione poteſt illud limitibus arctare, hanc non item. Qua de cauſa ubi æquationes ſunt imparium dimenſionum, adeoque radices omnes impoſſibiles habere non poſſunt; ſchemata quantitatibus à quibus radices omnes pendent ſæpe limites imponunt quos transgredi ſervatis ſchematum conditionibus impoſſibile eſt. TAB. VIII. Fig. 10.

Ex radicibus vero quæ reales ſunt, affirmativæ & negativæ ad plagas oppoſitas ſolent tendere.

Sic in Fig. nona quærendo perpendiculum C G incidetur in æquationem cujus duæ erunt affirmativæ radices C G ac D H à punctis C & D tendentes verſus unam plagam, & duæ negativæ E I & F K, tendentes à punctis E & F verſus plagam oppoſitam. TAB. VIII. Fig. 9.

A a Aut

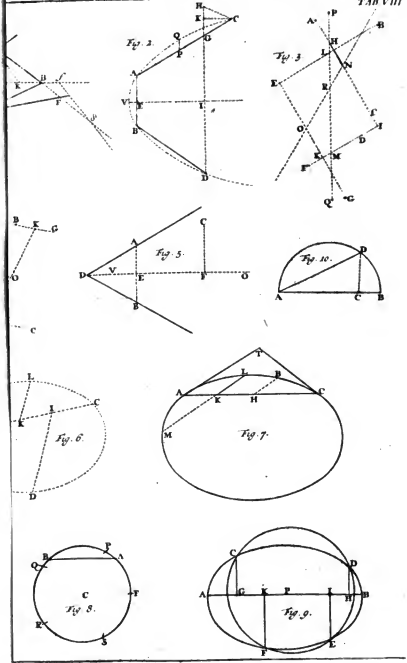
Aut ſi in linea AB ad quam perpendicula demittuntur detur aliquod punctum P, & pars ejus PG, à puncto illo dato ad perpendiculorum aliquod CG, extendens ſequæratur, incidemus in æquationem quatuor radicum PG, PH, PI, PK, quarum quæſita PG, & quæ à puncto P ad eaſdem partes cum PG tendunt (ut PK) affirmativæ erunt, quæ vero tendunt ad partes contrarias (ut PH, PI) negativæ.

Ubi æquationis radices nullæ impoſſibiles ſunt, numerus radicum *affirmativarum & negativarum ex* ſignis *terminorum æquationis cognoſci poteſt.* Tot *enim ſunt radices affirmativæ quot ſignorum in continua ſerie* mutationes *de* + *in* — & — *in* +; *cæteræ* negativæ *ſunt.*

Ut in æquatione $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, ubi terminorum ſigna ſe ſequuntur hoc ordine + — — + — variationes ſecundi — à primo +, quarti + à tertio — & quinti —, à quarto +, indicant tres affirmativas eſſe radices, adeoque quartam negativam eſſe. At ubi radices aliquæ *impoſſibiles* ſunt regula non valet, niſi quatenus impoſſibiles illæ quæ nec negativæ ſunt nec affirmativæ pro *ambiguis* habeantur. Sic in æquatione $x^3 + pxx + 3ppx - q = 0$, ſigna indicant unam eſſe affirmativam radicem & duas negativas. Finge $x = 2p$ ſeu $x - 2p = 0$, & multiplica æquationem priorem per hanc $x - 2p = 0$, ut una adhuc radix affirmativa addatur prioribus, & prodibit hæc æquatio $x^4 - px^3 + ppxx - \frac{6p^3}{q}x + 2pq = 0$, quæ habere deberet duas affirmativas ac duas negativas radices, habet tamen, ſi mutationem ſignorum ſpectes, affirmativas quatuor. Sunt ergo *duæ impoſſibiles* quæ pro ambiguitate ſua priori caſu negativæ poſteriori affirmativæ eſſe videntur.

Verum quot radices impoſſibiles ſunt cognoſci fere poteſt per hanc regulam.

Conſtitue ſeriem fractionum quorum denominatores ſunt numeri in hac progreſſione 1, 2, 3, 4, 5, &c. *pergendo ad numerum uſque qui eſt dimenſionum æquationis*; *numeratores vero eadem ſeries numerorum in ordine contrario. Divide unamquamque fractionem poſteriorem per priorem. Fractiones prodeuntes colloca ſuper terminis mediis æquationis. Et ſub quolibet mediorum terminorum, ſi quadratum ejus ductum in*



Digitized by Google

Digitized by Google

in fractionem capiti imminentem ſit majus quam rectangulum terminorum utrinque conſiſtentium, colloca ſignum +; ſin minus, ſignum —. Sub primo vero & ultimo termino colloca ſignum +. Et tot erunt radices impoſſibiles quot ſunt in ſubſcriptorum ſignorum ſerie mutationes de + in — & — in +.

Ut ſi habeatur æquatio $x^3+pxx+3ppx-q=0$: Divido ſeriei hujus $\frac{3}{1}.\frac{2}{2}.\frac{1}{3}.$ fractionum ſecundam $\frac{2}{2}$ per primam $\frac{3}{1}$, & tertiam $\frac{1}{3}$ per ſecundam $\frac{2}{2}$, & fractiones prodeuntes $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{3}$ colloco ſuper mediis terminis æquationis ut ſequitur.

$$\begin{array}{ccccc} & \frac{1}{3}. & \frac{1}{3}. & & \\ x^3 & +pxx & +3ppx & -q & =0 \\ + & - & + & + & \end{array}$$

Dein quoniam quadratum ſecundi termini pxx ductum in imminentem fractionem $\frac{1}{3}$, nimirum $\frac{ppx^4}{3}$ minus eſt quam primi termini x^3, & tertii $3ppx$ rectangulum $3ppx^4$ ſub termino pxx colloco ſignum —. At quia tertii termini $3ppx$ quadratum $9p^4xx$ ductum in imminentem fractionem $\frac{1}{3}$, majus eſt quam nihil, atque adeo multo majus quam ſecundi termini pxx, & quarti $-q$ rectangulum negativum, colloco ſub tertio illo termino ſignum +. Dein ſub primo termino x^3 & ultimo $-q$ colloco ſigna +. Et ſignorum ſubſcriptorum quæ in hac ſunt ſerie + — + + mutationes duæ, una de + in —, alia de — in + indicant duas eſſe radices impoſſibiles. Sic & æquatio $x^3-4xx+4x-6=0$, duas habet radices impoſſibiles. Æquatio item $x^4-6xx-3x-2=0$, duas habet. Nam hæc fractionum ſeries $\frac{4}{1}.\frac{3}{2}.\frac{2}{3}.\frac{1}{4}.$ dividendo ſecundam per primam, tertiam per ſecundam, & quartam per tertiam, dat hanc ſeriem $\frac{3}{8}.\frac{4}{9}.\frac{3}{8}$ ſuper mediis æquationis terminis collocandam.

$$\begin{array}{ccccc} & \frac{1}{3}. & \frac{1}{3}. & & \\ x^3 & -4xx & +4x & -6 & =0 \\ + & + & - & + & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} & \frac{3}{8} & \frac{4}{9} & \frac{3}{8} & & \\ x^4 & * & -6xx & -3x & -2 & =0 \\ + & + & + & - & + & \end{array}$$

Dein ſecundi termini qui hic nihil eſt quadratum ductum in fractionem imminentem $\frac{3}{8}$ producit nihil, quod tamen majus eſt quam rectangulum negativum $-6x^6$ ſub terminis utrinque poſitis x^4 & $-6xx$ contentum. Quare ſub termino illo deficiente ſcribo +. In cæteris pergo ut in exemplo ſuperiori; & ſignorum ſubſcriptorum prodit hæc ſeries + + + — + ubi duæ mutationes indicant duas

 radi-

Digitized by Google

radices impoſſibiles. Et ad eundem modum in æquatione $x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 2xx - 5x - 4 = 0$, deteguntur impoſſibiles duæ.

$$\begin{array}{cccccc} & \frac{2}{5}. & \frac{1}{2}. & \frac{1}{2}. & \frac{2}{5}. & \\ x^5 & -4x^4 & +4x^3 & -2xx & -5x & -4=0 \\ + & + & - & + & + & + \end{array}$$

Ubi termini duo vel plures ſimul deſunt, ſub primo terminorum deficientium collocandum eſt ſignum $-$, ſub ſecundo ſignum $+$, ſub tertio ſignum $-$, & ſic deinceps, ſemper variando ſigna, niſi quod ſub ultimo terminorum ſimul deficientium ſemper collocandum eſt ſignum $+$ ubi termini deficientibus utrinque proximi habent ſigna contraria. Ut in æquationibus

$$\begin{array}{cccccc} x^5 & +ax^4 & * & * & * & +a^5=0, \\ + & + & - & + & - & + \end{array}$$

&

$$\begin{array}{cccccc} x^5 & +ax^4 & * & * & * & -a^5=0, \\ + & + & - & + & + & + \end{array}$$

quarum prior quatuor poſterior duas habet impoſſibiles radices. Sic & æquatio

$$\begin{array}{cccccccc} & \frac{3}{7}. & \frac{5}{9}. & \frac{3}{5}. & \frac{3}{5}. & \frac{5}{9}. & \frac{3}{7}. & \\ x^7 & -2x^6 & +3x^5 & -2x^4 & +x^3 & * & * & -3=0 \\ + & - & + & - & + & - & + & + \end{array}$$

ſex habet impoſſibiles.

Hinc etiam cognoſci poteſt utrum radices impoſſibiles inter affirmativas radices latent an inter negativas. Nam ſigna terminorum ſignis ſubſcriptis variantibus imminentium indicant tot affirmativas eſſe impoſſibiles quot ſunt ipſorum variationes, & tot negativas quot ſunt ipſorum ſucceſſiones ſine variatione. Sic in æquatione

$$\begin{array}{cccccc} x^5 & -4x^4 & +4x^3 & -2xx & -5x & -4=0 \\ + & + & - & + & + & + \end{array}$$

quoniam ſignis infra ſcriptis variantibus $+ - +$ quibus radices duæ impoſſibiles indicantur, imminentes termini $-4x^4 + 4x^3 - 2xx$, ſigna habent $- + -$, quæ per duas variationes indicant duas affirmativas radices; ideo radices duæ impoſſibiles inter affirmativas latebunt. Cum itaque omnium æquationis terminorum ſigna $+ - + - - -$ per tres variationes indicent tres eſſe affirmativas radices, & reliquas duas negativas eſſe, & inter affirmativas lateant duæ impoſſibiles, ſequitur æquationis unam eſſe radicem vere affirmativam duas negativas ac duas impoſſibiles. Quod ſi æquatio fuiſſet

$$\begin{array}{cccccc} x^5 & -4x^4 & -4x^3 & -2xx & -5x & -4=0 \\ + & + & - & - & + & + \end{array}$$

tunc termini ſubſcriptis ſignis prioribus variantibus $+ -$ imminentes,

ni-

nimirum $-4x^4-4x^3$ per ſigna ſua non variantia — & — indicant unam ex negativis radicibus impoſſibilem eſſe; & termini ſignis ſubſcriptis poſterioribus variantibus — + imminentes, nimirum $-2xx$ $-5x$ per ſigna ſua non variantia — & — indicant aliam ex negativis radicibus impoſſibilem eſſe. Quamobrem cum æquationis ſigna + — — — — — per unam variationem indicent unam affirmativam radicem, cæteras quatuor negativas eſſe; ſequitur unam eſſe affirmativam, duas negativas, ac duas impoſſibiles. Atque hæc ita ſe habent ubi non ſunt plures impoſſibiles radices quam per regulam allatam deteguntur. Poſſunt enim plures eſſe, licet id perraro eveniat.

De tranſmutationibus Æquationum.

Cæterum æquationis cujuſvis radices omnes affirmativæ *in* negativas *&* negativæ *in* affirmativas *mutari poſſunt, idque mutando tantum ſigna terminorum alternorum.*

Sic æquationis $x^5-4x^4+4x^3-2xx-5x-4=0$, radices tres affirmativæ mutabuntur in negativas, & duæ negativæ in affirmativas mutando tantum ſigna ſecundi quarti & ſexti termini ut hic fit, $x^5+4x^4+4x^3+2xx-5x+4=0$. Eaſdem habet hæc æquatio radices cum priore niſi quod hic affirmativæ ſunt quæ ibi erant negativæ, & hic negativæ quæ ibi erant affirmativæ; & radices duæ impoſſibiles quæ ibi inter affirmativas latebant hic latent inter negativas, ita ut his deductis reſtet unica tantum radix vere negativa.

Sunt & aliæ æquationum tranſmutationes quæ diverſis uſibus inſerviunt. *Poſſumus enim ſupponere radicem æquationis ex cognita & incognita aliqua quantitate utcunque componi, & perinde pro ea ſubſtituere quod æquipollens eſſe fingitur.* Ut ſi ſupponamus radicem æqualem eſſe ſummæ vel differentiæ cognitæ alicujus & incognitæ quantitatis. Nam poſſumus hoc pacto radices æquationis cognita illa quantitate augere vel diminuere, vel de cognita quantitate ſubducere; atque ita efficere ut earum aliquæ quæ prius erant negativæ jam fiant affirmativæ, vel ut aliquæ ex affirmativis evadant negativæ; vel etiam ut omnes evadant affirmativæ aut omnes negativæ. Sic in æquatione $x^4-x^3-19xx+49x-30=0$, ſi radices unitate

augeri vellem, fingo $x+1=y$, ſeu $x=y-1$, & perinde pro x ſcribo in æquatione $y-1$, & pro quadrato, cubo, quadrato-quadrato de x ſimilem poteſtatem de $y-1$, ad hunc modum.

$x^4.$	$y^4-4y^3+6yy-4y+1$
$-x^3.$	$-y^3+3yy-3y+1$
$-19xx.$	$-19yy+38y-19$
$+49x.$	$+49y-49$
$-30.$	-30
Summa	$y^4-5y^3-10yy+80y-96=0.$

Et æquationis prodeuntis $y^4-5y^3-10yy+80y-96=0$, radices erunt $2, 3, 4, -4$, quæ prius erant $1, 2, 3, -5$, unitate jam factæ majores. Quod ſi pro x ſcripſiſſem $y+1\frac{1}{2}$ prodiiſſet æquatio $y^4+5y^3-10yy-\frac{5}{4}y+\frac{39}{16}=0$, cujus duæ fuiſſent radices affirmativæ $\frac{1}{2}$ & $1\frac{1}{2}$ ac duæ negativæ $-\frac{1}{2}$ & $-6\frac{1}{2}$. Pro x vero ſcribendo $y-6$ prodiiſſet æquatio cujus radices fuiſſent $7, 8, 9, 1$, omnes nimirum affirmativæ, & pro eodem ſcribendo $y+4$ radices jam numero quaternario diminutæ evaſiſſent $-3, -2, -1, -9$, negativæ omnes.

Et hoc modo augendo vel diminuendo radices ſiquæ impoſſibiles ſunt, hæ aliquando facilius detegentur quam prius. Sic in æquatione $x^3-3aax-3a^3=0$, radices nullæ per præcedentem regulam apparent impoſſibiles. At ſi augeas radices quantitate a ſcribendo $y-a$ pro x, in æquatione reſultante $y^3-3ayy-a^3=0$, radices duæ impoſſibiles jam per regulam illam detegi poſſunt.

Eadem operatione poſſumus etiam ſecundos terminos æquationum tollere. Hoc enim fiet ſi cognitam quantitatem ſecundi termini æquationis propoſitæ per numerum dimenſionum æquationis diviſam, ſubducamus de quantitate quæ pro novæ æquationis radice ſignificanda aſſumitur, & reſiduum ſubſtituamus pro radice æquationis propoſitæ. Ut ſi proponatur æquatio $x^3-4xx+4x-6=0$, cognitam quantitatem ſecundi termini quæ eſt -4 diviſam per numerum dimenſionum æquationis 3 ſubduco de ſpecie quæ pro nova radice ſignificanda aſſumitur, puta de y, & reſiduum $y+\frac{4}{3}$ ſubſtituo pro x, & provenit,

y^3

$$\begin{array}{rrrr} y^3 + 4yy + \frac{16}{3}y + \frac{64}{27} \\ -4yy - \frac{32}{3}y - \frac{64}{9} \\ +4y + \frac{16}{3} \\ -6 \\ \hline y^3 \quad * \quad -\frac{4}{3}y - \frac{146}{27} = 0. \end{array}$$

Eadem methodo poteſt & tertius æquationis terminus tolli. Proponatur æquatio $x^4 - 3x^3 + 3xx - 5x - 2 = 0$, & finge $x = y - e$, & ſubſtituendo $y - e$ pro x orietur hæc æquatio.

$$\left.y^4 \begin{array}{l} -4e \\ -3 \end{array} y^3 \begin{array}{l} +6ee \\ +9e \\ +3 \end{array} yy \begin{array}{l} -4e^3 \\ -9ee \\ -6e \\ -5 \end{array} y \begin{array}{l} +e^4 \\ +3e^3 \\ +3ee \\ +5e \\ -2 \end{array}\right\} = 0.$$

Hujus æquationis tertius terminus eſt $6ee + 9e + 3$ ductum in yy. Ubi ſi $6ee + 9e + 3$ nullum eſſet, eveniret ipſum quod volumus. Fingamus itaque nullum eſſe ut inde colligamus quinam numerus ad hunc effectum ſubſtitui debet pro e, & habebimus æquationem quadraticam $6ee + 9e + 3 = 0$, quæ diviſa per 6 fiet $ee + \frac{3}{2}e + \frac{1}{2} = 0$, ſeu $ee = -\frac{3}{2}e - \frac{1}{2}$, & extracta radice $e = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} - \frac{1}{2}}$, ſeu $= -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16}}$, hoc eſt $= -\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}$, atque adeo vel $= -\frac{1}{2}$ vel $= -1$. Unde $y - e$ erit vel $y + \frac{1}{2}$ vel $y + 1$. Quamobrem cum $y - e$, ſcriptum fuit pro x, vice $y - e$ debet $y + \frac{1}{2}$ vel $y + 1$ ſcribi pro x, ut tertius æquationis reſultantis terminus nullus ſit. Et in utroque quidem caſu id eveniet. Nam ſi pro x ſcribatur $y + \frac{1}{2}$ orietur hæc æquatio $y^4 - y^3 - \frac{15}{4}y - \frac{65}{16} = 0$; ſin ſcribatur $y + 1$, orietur hæc $y^4 + y^3 - 4y - 6 = 0$.

Poſſunt & radices æquationis per datos numeros multiplicari vel dividi; & hoc pacto termini æquationum diminui, fractioneſque & radicales quantitates aliquando tolli.

Ut ſi æquatio ſit $y^3 - \frac{4}{3}y - \frac{146}{27} = 0$, ad tollendas fractiones fingo eſſe $y = \frac{1}{3}z$, & perinde pro y ſubſtituendo $\frac{1}{3}z$ provenit æquatio nova $\frac{z^3}{27} - \frac{12z}{27} - \frac{146}{27} = 0$, & rejecto terminorum communi

muni denominatore, $z^3 - 12z - 146 = 0$, cujus æquationis radices ſunt triplo majores quam ante. Et rurſus ad diminuendos terminos æquationis hujus ſi ſcribatur $2v$ pro z, prodibit $8v^3 - 24v - 146 = 0$, & diviſis omnibus per 8 fiet $v^3 - 3v - 18\frac{1}{4} = 0$, cujus æquationis radices dimidiæ ſunt radicum prioris. Et hic ſi tandem inveniatur v ponendum erit $2v = z$, $\frac{1}{3}z = y$, & $y + \frac{4}{3} = x$, & æquationis primo propoſitæ $x^3 - 4xx + 4x - 6 = 0$ habebitur radix x.

Sic & in æquatione $x^3 - 2x + \sqrt{3} = 0$, ad tollendam quantitatem radicalem $\sqrt{3}$, pro x ſcribo $y\sqrt{3}$, & provenit æquatio $3y^3\sqrt{3} - 2y\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$, quæ diviſis omnibus terminis per $\sqrt{3}$ fit $3y^3 - 2y + 1 = 0$.

Rurſus æquationis radices in earum reciprocas tranſmutari poſſunt, & hoc pacto æquatio aliquando ad formam commodiorem reduci.

Sic æquatio noviſſima $3y^3 - 2y + 1 = 0$, ſcribendo $\frac{1}{z}$ pro y evadit $\frac{3}{z^3} - \frac{2}{z} + 1 = 0$, ſeu terminis omnibus multiplicatis per z^3, & ordine terminorum mutato $z^3 - 2zz + 3 = 0$. Poteſt etiam æquationis terminus penultimus hoc pacto tolli, ſi modo ſecundus prius tollatur, ut factum vides in exemplo præcedente. Aut ſi antepenultimum tolli cupias id fiet ſi modo tertium prius tollas. Sed & radix minima hoc pacto in maximam convertitur, & maxima in minimam; quod uſum nonnullum habere poteſt in ſequentibus. Sic in æquatione $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, cujus radices ſunt $3, 2, 1, -5$, ſi ſcribatur $\frac{1}{y}$ pro x reſultabit æquatio $\frac{1}{y^4} - \frac{1}{y^3} - \frac{19}{yy} + \frac{49}{y} - 30 = 0$, quæ, terminis omnibus multiplicatis per y^4 ac diviſis per 30, ſigniſque mutatis, fiet $y^4 - \frac{49}{30}y^3 + \frac{19}{30}yy + \frac{1}{30}y - \frac{1}{30} = 0$, cujus radices ſunt $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{5}$; radicum affirmativarum maxima 3 jam converſa in minimam $\frac{1}{3}$, & minima 1 jam facta maxima, & radice negativa -5 quæ omnium maxime diſtabat à nihilo, jam omnium maxime accedente ad nihil.

Sunt & aliæ æquationum tranſmutationes ſed quæ omnes ad exemplum tranſmutationis illius ubi tertium æquationis terminum ſuſtulimus

mus confici poſſunt, ut non opus ſit hac de re plura dicere. Addamus potius aliqua de Limitibus Æquationum.

Ex Æquationum generatione conſtat quod cognita quantitas ſecundi *termini æquationis, ſi ſignum ejus mutetur, æqualis ſit aggregato omnium radicum ſub ſignis propriis; ea* tertii *æqualis aggregato rectangulorum ſub ſingulis binis radicibus; ea* quarti *ſi ſignum ejus mutetur, æqualis aggregato contentorum ſub ſingulis ternis radicibus; ea* quinti *æqualis aggregato contentorum ſub ſingulis quaternis; & ſic in infinitum.*

Aſſumamus $x=a$, $x=b$, $x=-c$, $x=d$, &c. ſeu $x-a=0$, $x-b=0$, $x+c=0$, $x-d=0$, & ex horum continua multiplicatione generemus æquationes, ut ſupra. Jam multiplicando $x-a$ per $x-b$ producetur æquatio $xx \begin{matrix}-a\\-b\end{matrix} x+ab=0$; ubi cognita quantitas ſecundi termini, ſi ſigna ejus mutentur, nimirum $a+b$, eſt ſumma duarum radicum a & b, & cognita tertii ab illud unicum quod ſub utraque continetur rectangulum. Rurſus multiplicando hanc æquationem per $x+c$ producetur æquatio cubica $x^3 \begin{matrix}-a\\-b\\+c\end{matrix} xx \begin{matrix}+ab\\-ac\\-bc\end{matrix} x+abc=0$, ubi cognita quantitas ſecundi ſub ſignis mutatis nimirum $a+b-c$ eſt ſumma radicum a, b & $-c$; cognita tertii $ab-ac-bc$, ſumma rectangulorum ſub ſingulis binis a & b, a & $-c$, b & $-c$; & cognita quarti ſub ſigno mutato $-abc$ illud unicum contentum eſt quod omnium continua multiplicatione generatur, a in b in $-c$. Adhæc multiplicando cubicam illam æquationem per $x-d$ producetur hæcce quadrato-quadratica

$$x^4 \begin{matrix}-a\\-b\\+c\\-d\end{matrix} x^3 \begin{matrix}+ab\\-ac\\-bc\\+ad\\+bd\\-cd\end{matrix} xx \begin{matrix}+abc\\-abd\\+bcd\\+acd\end{matrix} x-abcd=0:$$

ubi cognita quantitas ſecundi termini ſub ſignis mutatis $a+b-c+d$, eſt ſumma omnium radicum; ea tertii $ab-ac-bc+ad+bd-cd$ ſumma rectangulorum ſub ſingulis binis; ea quarti ſub ſignis mutatis $-abc+abd-bcd-acd$ ſumma contentorum ſub ſingulis ternis;

Digitized by Google

nis; ea quinti $-abcd$ contentum unicum ſub omnibus. Et hinc primo colligimus omnes æquationis cujuſcunque, terminos nec fractos nec ſurdos habentis, radices non ſurdas, & radicum binarum rectangula, ternarumque aut plurium contenta eſſe aliquos ex diviſoribus integris ultimi termini; atque adeo ubi conſtiterit nullum ultimi termini diviſorem, eſſe aut radicem æquationis, aut duarum radicum rectangulum pluriumve contentum, ſimul conſtabit nullam eſſe radicem radicumve rectangulum aut contentum niſi quod ſit ſurdum.

Ponamus jam cognitas quantitates terminorum æquationis ſub ſignis mutatis eſſe p, q, r, s, t, v, &c. eam nempe ſecundi p, tertii q, quarti r, quinti s, & ſic deinceps. Et ſignis terminorum probe obſervatis fiat $p=a$. $pa+2q=b$. $pb+qa+3r=c$. $pc+qb+ra+4s=d$. $pd+qc+rb+sa+5t=e$. $pe+qd+rc+sb+ta+6v=f$. & ſic in infinitum, obſervata ſerie progreſſionis. Et erit a ſumma radicum, b ſumma quadratorum ex ſingulis radicibus, c ſumma cuborum, d ſumma quadrato-quadratorum, e ſumma quadrato-cuborum, f ſumma cubo-cuborum, & ſic in reliquis. Ut in æquatione $x^4-x^3-19xx+49x-30=0$, ubi cognita quantitas ſecundi termini eſt -1, tertii -19, quarti $+49$, quinti -30; ponendum erit $1=p$, $19=q$, $-49=r$, $30=s$. Et inde orientur $a=(p=)\,1$. $b=(pa+2q=1+38=)\,39$. $c=(pb+qa+3r=39+19-147=)-89$. $d=(pc+qb+ra+4s=-89+741-49+120=)\,723$. Quare ſumma radicum erit 1, ſumma quadratorum radicum 39, ſumma cuborum -89, & ſumma quadrato-quadratorum 723. Nimirum æquationis illius radices ſunt 1, 2, 3 & -5, & harum ſumma $1+2+3-5$ eſt 1, ſumma quadratorum $1+4+9+25$ eſt 39, ſumma cuborum $1+8+27-125$ eſt -89, & ſumma quadrato-quadratorum $1+16+81+625$ eſt 723.

De Limitibus Æquationum.

Et hinc colliguntur *Limites* inter quos conſiſtent radices æquationis ubi nulla earum impoſſibilis eſt. Nam cum radicum omnium quadrata ſunt affirmativa, quadratorum ſumma affirmativa erit, ideoque quadrato maximæ radicis major. Et eodem argumento, ſumma quadrato-quadratorum radicum omnium major erit quam quadrato-quadratum radicis maximæ, & ſumma cubo-cuborum major quam cubo-cubus radicis maximæ.

Quam-

Quamobrem ſi limitem deſideres quem radices nullæ tranſgrediuntur, quære ſummam quadratorum radicum & extrahe ejus radicem quadraticam. Hæc enim radix major *erit quam radix maxima æquationis.* Sed ad radicem maximam propius accedes ſi quæras *ſummam quadrato-quadratorum & extrahas ejus radicem quadrato-quadraticam, &* *adhuc* magis *ſi quæras ſummam cubo-cuborum & extrahas ejus radicem cubo-cubicam: Et ita in infinitum.*

Sic in æquatione præcedente radix quadratica ſummæ quadratorum radicum, ſeu $\sqrt{39}$, eſt $6\frac{1}{4}$ quam proxime, & $6\frac{1}{4}$ magis diſtat à nihilo quam ulla radicum $1, 2, 3, -5$. At radix quadrato-quadratica ſummæ quadrato-quadratorum radicum, nempe $\sqrt[4]{723}$ quæ eſt $5\frac{1}{2}$ circiter, proprius accedit ad radicem à nihilo remotiſſimam -5.

Si inter ſummam quadratorum & ſummam quadrato-quadratorum radicum inveniatur media proportionalis, erit ea paulo major quam ſumma cuborum radicum ſub ſignis affirmativis connexorum. Et inde hujus mediæ proportionalis & ſummæ cuborum ſub propriis ſignis, ut prius inventæ, ſemiſumma erit major quam ſumma cuborum radicum affirmativarum, & ſemidifferentia major quam ſumma cuborum radicum negativarum.

Atque adeo maxima radicum affirmativarum minor erit quam radix cubica illius ſemiſummæ, & maxima radicum negativarum minor quom radix cubica illius ſemidifferentiæ.

Sic in æquatione præcedente media proportionalis inter ſummam quadratorum radicum 39, & ſummam quadrato-quadratorum 723 eſt 168 circiter. Summa cuborum ſub propriis ſignis ſupra erat -89. Hujus & 168 ſemiſumma eſt $39\frac{1}{2}$, ſemidifferentia $128\frac{1}{2}$. Prioris radix cubica, quæ eſt $3\frac{2}{5}$ circiter, major eſt quam maxima radicum affirmativarum 3. Poſterioris radix cubica quæ eſt $5\frac{1}{25}$ proxime, tranſcendit radicem negativam -5. Quo exemplo videre eſt quam prope ad radicem hac methodo acceditur ubi unica tantum radix negativa eſt vel unica affirmativa. *Et tamen propius adhuc accederetur*, ſi inter ſummam quadrato quadratorum radicum & ſummam cubo-cuborum media proportionalis inveniretur atque ex hujus, & ſummæ quadrato-cuborum radicum ſemiſumma & ſemidifferentia

radices quadrato cubicæ extraherentur. Nam radix quadrato-cubica ſemiſummæ tranſcenderet maximam radicem affirmativam, & radix quadrato-cubica ſemidifferentiæ maximam ſeu extimam negativam, ſed exceſſu multo minore quam ante. Cum igitur radix quælibet, augendo vel diminuendo radices omnes fieri poteſt minima, dein minima in maximam converti, & poſtea omnes præter maximam fieri negativæ, conſtat quomodo radix imperata quam proxime poteſt obtineri.

Si radices omnes præter duas negativæ ſunt, poſſunt illæ duæ ſimul hoc modo erui.

Inventa juxta methodum præcedentem ſumma cuborum duarum illarum radicum, ut & ſumma quadrato-cuborum & ſumma quadrato-quadrato cuborum radicum omnium; inter poſteriores duas ſummas quære mediam proportionalem, & ea erit differentia inter ſummam cubo-cuborum radicum affirmativarum, & ſummam cubo-cuborum radicum negativarum quam proxime; adeoque hujus mediæ proportionalis & ſummæ cubo-cuborum radicum omnium ſemiſumma erit ſumma cubo-cuborum radicum affirmativarum, & ſemidifferentia erit ſumma cubo-cuborum radicum negativarum. Habita igitur tum ſumma cuborum, tum ſumma cubo-cuborum radicum duarum affirmativarum, de duplo ſummæ poſterioris aufer quadratum ſummæ prioris, & reliqui radix quadratica erit differentia cuborum duarum radicum. Habita vero tum ſumma tum differentia cuborum habentur cubi ipſi. Extrahe eorum radices cubicas & habebuntur æquationis radices duæ affirmativæ quam proxime. Et ſi in altioribus poteſtatibus opus conſimile inſtitueretur magis adhuc accederetur ad radices. Sed hæ limitationes ob difficilem calculum minus uſui ſunt, & ad æquationes tantum ſe extendunt quæ nullas habent radices imaginarias. Quapropter limites alia ratione invenire jam docebo quæ & facilior ſit & ad omnes æquationes ſe extendat.

Multiplicetur æquationis terminus unuſquiſque per numerum dimenſionum ejus, & dividatur factum per radicem æquationis. Dein rurſus multiplicetur unuſquiſque terminorum prodeuntium per numerum unitate minorem quam prius, & factum dividatur per radicem æquationis. Et ſic pergatur ſemper multiplicando per numeros unitate minores quam prius, & factum dividendo per radicem, donec tandem termini

mini omnes deſtruantur quorum ſigna diverſa ſunt à ſigno primi ſeu altiſſimi termini præter ultimum. Et numerus ille erit omni affirmativa radice major, qui in terminis prodeuntibus ſcriptus pro radice, efficit eorum qui ſingulis vicibus per multiplicationem producebantur aggregatum ejuſdem ſemper eſſe ſigni cum primo ſeu altiſſimo termino æquationis.

Ut ſi proponatur æquatio $x^5-2x^4-10x^3+30xx+63x-120=0$. Hanc primum ſic multiplico $\begin{array}{cccccc}5&4&3&2&1&0\\ x^5&-2x^4&-10x^3&+30xx&+63x&-120.\end{array}$ Dein terminos prodeuntes diviſos per x rurſum multiplico ſic $\begin{array}{ccccc}4&3&2&1&0\\ 5x^4&-8x^3&-30xx&+60x&+63,\end{array}$ & terminos prodeuntes rurſum dividendo per x prodeunt $20x^3-24xx-60x+60$, quos minuendi gratia divido per maximum diviſorem 4 & fiunt $5x^3-6xx-15x+15$. Hi itidem multiplicati per progreſſionem 3. 2. 1. 0, & diviſi per x fiunt $15xx-12x-15$, & rurſum diviſi per 3 fiunt $5xx-4x-5$. Et hi multiplicati per progreſſionem 2. 1. 0, & diviſi per $2x$ fiunt $5x-2$. Jam cum terminus æquationis altiſſimus x^5 affirmativus ſit, tento quinam numerus ſcriptus in his productis pro x, efficiet ea omnia affirmativa eſſe. Et quidem tentando 1, fit $5x-2=3$ affirmativum ſed $5xx-4x-5$, fit -4 negativum. Quare limes erit major quam 1. Tento itaque numerum aliquem majorem puta 2. Et in ſingulis ſubſtituendo 2 pro x, evadunt

$$\begin{array}{l}5x-2=8\\ 5xx-4x-5=7\\ 5x^3-6xx-15x+15=1\\ 5x^4-8x^3-30xx+60x+63=79\\ x^5-2x^4-10x^3+30xx+63x-120=46.\end{array}$$

Quare cum numeri prodeuntes 8. 7. 1. 79. 46, ſint omnes affirmativi, erit numerus 2 major quam radicum affirmativarum maxima. Similiter ſi limitem negativarum radicum invenire vellem, tento numeros negativos. Vel quod perinde eſt muto ſigna terminorum alternorum & tento affirmativos. Mutatis autem terminorum alternorum ſignis, quantitates in quibus numeri ſubſtituendi ſunt fient

Digitized by Google

$$\begin{array}{l} 5x + 2 \\ 5xx + 4x - 5 \\ 5x^3 + 6xx - 15x - 15 \\ 5x^4 + 8x^3 - 30xx - 60x + 63 \\ x^5 + 2x^4 - 10x^3 - 30xx + 63x + 120. \end{array}$$

Ex his ſeligo quantitatem aliquam ubi termini negativi maxime prævalere videntur; puta $5x^4 + 8x^3 - 30xx - 60x + 63$, & hic ſubſtituendo pro x numeros 1 & 2 prodeunt numeri negativi -14 & -33. Unde limes erit major quam -2. Subſtituendo autem numerum 3 prodit numerus affirmativus 234. Et ſimiliter in cæteris quantitatibus ſubſtituendo numerum 3 pro x prodit ſemper numerus affirmativus. Id quod ex inſpectione ſola colligere licet. Quare numerus -3 tranſcendit omnes radices negativas. Atque ita habentur limites 2 & -3 inter quos radices omnes conſiſtunt.

Horum vero limitum inventio uſui eſt tum in reductione æquationum per radices rationales, tum in extractione radicum ſurdarum ex ipſis; ne forte radicem extra hos limites aliquando quæramus. Sic in æquatione noviſſima ſi radices rationales, ſiquas forte habeat, invenire vellem; ex ſuperioribus certum eſt has non alias eſſe poſſe quam diviſores ultimi termini æquationis, qui hic eſt 120. Proin tentando omnes ejus diviſores, ſi nullus earum ſcriptus in æquatione pro radice x efficeret omnes terminos evaneſcere; certum eſt æquationem non admittere radicem niſi quæ ſit ſurda. At ultimi termini 120, diviſores permulti ſunt, nimirum $1. -1. 2. -2. 3. -3. 4. -4. 5. -5. 6. -6. 8. -8. 10. -10. 12. -12. 15. -15. 20. -20. 24. -24. 30. -30. 40. -40. 60. -60. 120.$ & -120. Et hos omnes diviſores tentare, tædio eſſet. Cognito autem quod radices inter limites 2 & -3 conſiſtunt, liberamur à tanto labore. Jam enim non opus erit diviſores tentare niſi qui ſunt inter hos limites, nimirum diviſores $1, -1,$ & -2. Nam ſi horum nullus radix eſt, certum eſt æquationem non habere radicem niſi quæ ſit ſurda.

Æqua-

Æquationum Reductio per Diviſores ſurdos.

Hactenus reductionem æquationum tradidi quæ rationales diviſores admittunt. Sed antequam æquationem quatuor, ſex, aut plurium dimenſionum irreducibilem eſſe concludere poſſumus, tentandum erit etiam annon per ſurdum aliquem diviſorem reduci queat; vel quod perinde eſt, tentandum erit annon æquatio ita in duas æquales partes dividi poſſit ut ex utraque radix extrahatur. Id autem fiet per ſequentem methodum.

Diſpone æquationem ſecundum dimenſiones literæ alicujus, ita ut omnes ejus termini ſub ſignis ſuis conjunctim æquales ſint nihilo, & terminus altiſſimus affirmativo ſigno afficiatur. Deinde ſi æquatio quadratica *ſit (nam & hunc caſum ob rei analogiam adjicere lubet) aufer utrobique terminum infimum, & adde quartam partem quadrati cognitæ quantitatis termini medii.*

Ut ſi æquatio ſit $xx - ax - b = 0$, aufer utrobique $-b$ & adde $\frac{1}{4}aa$, & emerget $xx - ax + \frac{1}{4}aa = b + \frac{1}{4}aa$, *& extracta utrobique radice fiet* $x - \frac{1}{2}a = \pm\sqrt{b + \frac{1}{4}aa}$, ſive $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{b + \frac{1}{4}aa}$.

Quod ſi æquatio ſit quatuor dimenſionum, *ſit ea* $x^4 + px^3 + qxx + rx + s = 0$, ubi p, q, r, & s, *denotant cognitas quantitates terminorum æquationis ſignis propriis adfectas. Fac*

$$q - \tfrac{1}{4}pp = \alpha. \quad r - \tfrac{1}{2}\alpha p = \beta.$$
$$s - \tfrac{1}{4}\alpha\alpha = \zeta.$$

Dein pone pro n communem aliquem terminorum β & 2ζ diviſorem integrum, & non quadratum, qui & impar eſſe debet & per 4 diviſus unitatem relinquere, ſi terminorum p & r alteruter ſit impar. Pone etiam pro k diviſorem aliquem quantitatis $\frac{\beta}{n}$ ſi p ſit par; vel imparis diviſoris dimidium ſi p ſit impar; vel nihil, ſi dividuum β ſit nihil. Aufer Quotum de $\frac{1}{2}pk$, & reliqui dimidium dic l. Dein pro Q pone $\frac{\alpha + nkk}{2}$, & tenta ſi n dividat $QQ - s$, & Quoti radix ſit rationalis & æqualis l. Si hoc contigerit ad utramque partem æquationis adde $nkkxx + 2nklx + nll$, & radicem extrahes utrobique, prodeunte $xx + \frac{1}{2}px + Q = n^{\frac{1}{2}}$ in $kx + l$.

Exem-

Digitized by Google

Exempli gratia, proponatur æquatio $x^4 + 12x - 17 = 0$, & quia p & q hic deſunt, & r eſt 12, & s eſt -17, ſubſtitutis hiſce numeris fiet $\alpha = 0$, $\beta = 12$, & $\zeta = -17$, & ipſorum β & 2ζ ſeu 12 & -34 communis diviſor unicus, nimirum 2, erit n. Porro $\frac{\beta}{n}$ eſt 6, & ejus diviſores 1, 2, 3, & 6 ſucceſſive tentandi ſunt pro k, & -3, $-\frac{3}{2}$, -1, $-\frac{1}{2}$ pro l reſpective. Eſt autem $\frac{\alpha + nkk}{2}$ id eſt kk æquale Q. Eſt & $\sqrt{\frac{QQ - s}{n}}$, id eſt $\sqrt{\frac{QQ + 17}{2}} = l$. Ubi numeri pares 2 & 6 ſcribuntur pro k, Q fit 4 & 36, & $QQ - s$ numerus erit impar adeoque dividi non poteſt per n ſeu 2. Quare numeri illi 2 & 6 rejiciendi ſunt. Ubi vero 1 & 3 ſcribuntur pro k, Q fit 1 & 9, & $QQ - s$ fit 18 & 98, qui numeri dividi poſſunt per n, & quotorum radices extrahi. Sunt enim ± 3 & ± 7: quarum tamen ſola -3 congruit cum l. Pono itaque $k = 1$, $l = -3$, & $Q = 1$, & quantitatem $nkkxx + 2nklx + nll$, id eſt $2xx - 12x + 18$, addo ad utramque partem æquationis, & prodit $x^4 + 2xx + 1 = 2xx - 12x + 18$, & extracta trobique radice, $xx + 1 = x\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$. Quod ſi radicis extractionem effugere malueris pone $xx + \frac{1}{2}px + Q = \sqrt{n} \times \overline{kx + l}$, & invenietur ut ante $xx + 1 = \pm\sqrt{2} \times \overline{x - 3}$. Et ex hac æquatione ſi radices iterum extrahas proveniet $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2} \pm \sqrt{-\frac{1}{2} \mp 3\sqrt{2}}$, *h.e.* ſecundum ſignorum variationes, $x = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{3\sqrt{2} - \frac{1}{2}}$, & $x = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \sqrt{3\sqrt{2} - \frac{1}{2}}$. Item $x = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{-3\sqrt{2} - \frac{1}{2}}$, & $x = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \sqrt{-3\sqrt{2} - \frac{1}{2}}$. Quæ quidem quatuor ſunt radices æquationis ſub initio propoſitæ $x^4 + 12x - 17 = 0$. Sed earum ultimæ duæ ſunt impoſſibiles.

Proponamus jam æquationem $x^4 - 6x^3 - 58xx - 114x - 11 = 0$, & ſcribendo -6, -58, -114, & -11 pro p, q, r, & s reſpective, orietur $-67 = \alpha$, $-315 = \beta$, & $-1133\frac{1}{4} = \zeta$. Numerorum β & 2ζ, ſeu -315 & $-\frac{4533}{2}$, communis diviſor eſt unicus 3, adeoque hic erit n, & ipſius $\frac{\beta}{n}$ ſeu -105 diviſores ſunt

Digitized by Google

3, 5, 7, 15, 21, 35, & 105, qui itaque tentandi ſunt pro k. Quare tento primum 3, & quotum -35, qui prodit dividendo $\frac{\beta}{n}$ per k ſeu -105 per 3, ſubduco de $\frac{1}{2}pk$, ſeu -3×3, & reſtat 26; cujus dimidium 13 eſſe debet l. Sed $\frac{\alpha+nkk}{2}$, ſeu $\frac{-67+27}{2}$ id eſt -20 erit Q, & $QQ-s$ erit 411, qui dividi poteſt per n ſeu 3, ſed quoti 137 radix non poteſt extrahi. Quamobrem rejicio 3 & tento 5 pro k. Quotus qui jam prodit dividendo $\frac{\beta}{n}$ per k, ſeu -105 per 5, eſt -21, & hunc ſubducendo de $\frac{1}{2}pk$ ſeu -3×5 reſtat 6, cujus dimidium 3 erit l. Eſt & Q ſeu $\frac{\alpha+nkk}{2}$ id eſt $\frac{-67+75}{2}$ numerus 4. Et $QQ-s$, ſeu $16+11$ dividi poteſt per n; & Quoti, qui eſt 9, radix extracta 3 congruit cum l. Quamobrem concludo eſſe $l=3$, $k=5$, $Q=4$, & $n=3$, & ſi $nkkxx+2nklx+nll$, id eſt $75xx+90x+27$ ad utramque partem æquationis addatur, radicem utrobique extrahi poſſe, & prodire $xx+\frac{1}{2}px+Q=\sqrt{n}\times\overline{kx+l}$, ſeu $xx-3x+4=\pm\sqrt{3}\times\overline{5x+3}$, & extracta iterum radice $x=\frac{3\pm5\sqrt{3}}{2}\pm\sqrt{17\pm\frac{21\sqrt{3}}{2}}$.

Haud ſecus ſi proponatur æquatio hæcce $x^4-9x^3+15xx-27x+9=0$, ſcribendo -9, $+15$, -27, & $+9$, pro p, q, r, & s reſpective, emerget $-5\frac{1}{4}=\alpha$, $-50\frac{5}{8}=\beta$, & $2\frac{7}{64}=\zeta$. Ipſorum β & 2ζ, ſeu $-\frac{405}{8}$ & $\frac{135}{32}$ communes diviſores ſunt 3, 5, 9, 15, 27, 45, & 135; ſed 9 quadratus eſt, & 3, 15, 27, 135 diviſi per numerum 4 non relinquunt unitatem, ut ob imparem terminum p oporteret. His itaque rejectis reſtant ſoli 5 & 45 tentandi pro n. Ponamus primo $n=5$, & ipſius $\frac{\beta}{n}$ ſeu $-\frac{81}{8}$ diviſores impares dimidiati nempe $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{27}{2}$, $\frac{81}{2}$, tentandi erunt pro k. Si k ponatur $\frac{1}{2}$, quotus $-\frac{81}{4}$ qui prodit dividendo $\frac{\beta}{n}$ per k, ſubductus de $\frac{1}{2}pk$ ſeu

$-\frac{9}{2}$ relinquit 18 pro $2l$, & $\frac{\alpha+nkk}{2}$ ſeu -2 eſt Q, & $QQ-s$, ſeu -5 dividi quidem poteſt per n ſeu 5, ſed Quoti negativi -1 radix impoſſibilis eſt, quæ tamen deberet eſſe 9. Quare concludo k non eſſe $\frac{1}{2}$ & tento jam ſi ſit $\frac{3}{2}$. Quotum qui oritur dividendo $\frac{\beta}{n}$ per k, ſeu $-\frac{81}{8}$ per $\frac{3}{2}$, nempe Quotum $-\frac{27}{4}$ ſubduco de $\frac{1}{2}pk$ ſeu $-\frac{27}{4}$ & reſtat o. Unde l jam nihil erit. Eſt autem $\frac{\alpha+nkk}{2}$ ſeu 3 æqualis Q, & $QQ-s$ nihil eſt; unde rurſus l, qui hujus $QQ-s$ diviſi per n radix eſt, invenitur nihil. Quamobrem his ita quadrantibus concludo eſſe $n=5$, $k=\frac{3}{2}$, $l=0$, & $Q=3$, adeoque addendo ad utramque partem æquationis propoſitæ terminos $nkkxx+2nlkx+nll$ id eſt $\frac{45}{4}xx$, & radicem quadraticam utrobique extrahendo prodire $xx+\frac{1}{2}px+Q=\sqrt{n}\times\overline{kx+l}$, id eſt $xx-4\frac{1}{2}x+3=\sqrt{5}\times\frac{3}{2}x$.

Eadem methodo reducuntur etiam æquationes literales. Ut ſi fuerit $x^4-2ax^3\begin{matrix}+2aa\\-cc\end{matrix}xx-2a^3x+a^4=0$, ſubſtituendo $-2a$, $2aa-cc$, $-2a^3$ & $+a^4$ pro p, q, r, & s reſpective, obtinebuntur $aa-cc=\alpha$, $-acc-a^3=\beta$, & $\frac{3}{4}a^4+\frac{1}{2}aacc-\frac{1}{4}c^4=\zeta$. Quantitatum β & 2ζ diviſor communis eſt $aa+cc$ qui proinde erit n; & $\frac{\beta}{n}$ ſeu $-a$ diviſores habet 1 & a. Sed quia n duarum eſt dimenſionum, & $k\sqrt{n}$ non niſi unius eſſe debet, ideo k nullius erit, adeoque non poteſt eſſe a. Sit ergo $k=1$, & diviſo $\frac{\beta}{n}$ per k aufer quotum $-a$ de $\frac{1}{2}pk$ ſeu $-a$ & reſtabit nihil pro l. Porro $\frac{\alpha+nkk}{2}$ ſeu aa eſt Q, & $QQ-s$ ſeu a^4-a^4 nihil eſt; & inde rurſus prodit nihil pro l. Quod arguit quantitates n, k, l, & Q recte inventas eſſe; & additis ad utramque partem æquationis propoſitæ terminis $nkkxx+2nklx+nll$, id eſt $aaxx+ccxx$, radicem utrobique extrahi poſſe, & extractione illa prodire $xx+\frac{1}{2}px+Q=\sqrt{n}\times\overline{kx+l}$, id eſt $xx-ax+aa=$

+

$\pm x\sqrt{aa+cc}$. Et extracta iterum radice $x=\frac{1}{2}a\pm\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc}+$ vel $-\sqrt{\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}aa\pm\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$.

Hactenus regulam applicui ad extractionem *radicum ſurdarum:* poteſt tamen eadem ad extractionem etiam *rationalium* applicari, ſi modo pro quantitate n uſurpetur unitas; eoque pacto una vice examinare poſſumus utrum æquatio fractis & ſurdis terminis carens diviſorem aliquem duarum dimenſionum aut rationalem aut ſurdum admittat. Ut ſi æquatio $x^4-x^3-5xx+12x-6=0$ proponatur, ſubſtituendo -1, -5, $+12$, & -6, pro p, q, r, & s reſpective invenientur $-5\frac{1}{4}=\alpha$, $9\frac{3}{8}=\beta$, & ponendo $n=1$, Quantitatis $\frac{\beta}{n}$ ſeu $\frac{75}{8}$ diviſores ſunt 1, 3, 5, 15, 25, 75: quorum dimidia (ſiquidem p ſit impar) tentanda ſunt pro k. Et ſi pro k tentemus $\frac{5}{2}$, fiet $\frac{1}{2}pk-\frac{\beta}{nk}=-5$, & ejus dimidium $-\frac{5}{2}=l$. Item $\frac{\alpha+nkk}{2}=\frac{1}{2}=Q$, & $\frac{QQ-s}{n}=6\frac{1}{4}$, cujus radix congruit cum l.

Concludo itaque quantitates n, k, l, Q recte inventas eſſe; & additis ad utramque partem æquationis terminis $nkkxx+2nklx+nll$, id eſt $6\frac{1}{4}xx-12\frac{1}{2}x+6\frac{1}{4}$, radicem utrobique extrahi poſſe; & extractione illa prodire $xx+\frac{1}{2}px+Q=\pm\sqrt{n}\times\overline{kx+l}$, id eſt $xx-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}=\pm 1\times 2\frac{1}{2}x-2\frac{1}{2}$, ſeu $xx-3x+3=0$, & $xx+2x-2=0$, adeoque per haſce duas æquationes quadraticas, æquationem propoſitam quadrato-quadraticam dividi poſſe. Sed hujuſmodi diviſores rationales expeditius inveniuntur per aliam methodum ſupra traditam.

Siquando quantitatis $\frac{\beta}{n}$ multi ſunt diviſores ita ut omnes pro k tentare moleſtum fuerit, poteſt eorum numerus cito minui quærendo omnes diviſores quantitatis $\alpha s-\frac{1}{4}rr$. Nam horum alicui aut imparis alicujus dimidio debet quantitas Q æqualis eſſe. Sic in exemplo noviſſimo $\alpha s-\frac{1}{4}rr$ eſt $-\frac{9}{2}$, è cujus diviſoribus 1, 3, 9 aut iiſdem dimidiatis $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$, aliquis debet eſſe Q. Quare ſigillatim tentando quantitatis $\frac{\beta}{n}$ diviſores dimidiatos $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{15}{2}$, $\frac{25}{2}$, & $\frac{75}{2}$ pro k, reji-

cio omnes qui non efficiunt $\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}nkk$, ſeu $-\frac{11}{8}+\frac{1}{2}kk$; id eſt Q eſſe aliquem è numeris 1, 3, 9, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{9}{4}$. Scribendo autem $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, &c. pro k, prodeunt reſpective $-\frac{5}{4}$, $-\frac{1}{4}$, $+\frac{7}{4}$, $+\frac{19}{4}$, &c. pro Q, è quibus ſoli $-\frac{1}{4}$ & $\frac{7}{4}$ reperiuntur in prædictis numeris, 1, 3, 9, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{9}{4}$, adeoque, cæteris rejectis, aut erit $k=\frac{3}{2}$, & $Q=-\frac{1}{4}$ aut $k=\frac{5}{2}$, & $Q=\frac{7}{4}$. Qui duo caſus examinentur. Atque hactenus de æquationibus *quatuor* dimenſionum.

Si æquatio ſex *dimenſionum reducenda eſt*, ſit ea $x^6+px^5+qx^4+rx^3+sxx+tx+v=0$, & fac

$$q-\tfrac{1}{4}pp=\alpha. \quad r-\tfrac{1}{2}p\alpha=\beta. \quad s-\tfrac{1}{2}p\beta=\gamma.$$
$$\gamma-\tfrac{1}{4}\alpha\alpha=\zeta. \quad t-\tfrac{1}{2}\alpha\beta=\eta. \quad v-\tfrac{1}{4}\beta\beta=\theta.$$
$$\zeta\theta-\tfrac{1}{4}\eta\eta=\lambda.$$

Dein ſumatur pro n, communis aliquis terminorum 2ζ, η, 2θ diviſor integer & non quadratus, nec per numerum quadratum diviſibilis, qui etiam per numerum 4 diviſus relinquit unitatem; ſi modo terminorum p, r, t aliquis ſit impar. Pro k ſumatur diviſor aliquis integer quantitatis $\frac{\lambda}{2nn}$ ſi p ſit par, vel diviſoris imparis dimidium ſi p ſit impar, vel nihil ſi λ nihil ſit. Pro Q, quantitas $\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}nkk$. Pro l diviſor aliquis quantitatis $\frac{Qr-QQp-t}{n}$ ſi Q ſit integer; vel diviſoris imparis dimidium ſi Q ſit fractus denominatorem habens numerum 2; vel nihil ſi dividuum iſtud $\frac{Qr-QQp-t}{n}$ ſit nihil. Et pro R quantitas $\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}Qp+nkl$. Dein tenta ſi $RR-v$ dividi poſſit per n, & Quoti radix extrahi; & præterea ſi radix iſta æqualis ſit tam quantitati $\frac{QR-\frac{1}{2}t}{nl}$ quam quantitati $\frac{QQ+pR-nll-s}{2nk}$. Si hæc omnia evenerint, dic radicem illam m; & vice æquationis propoſitæ ſcribe hanc $x^3+\frac{1}{2}pxx+Qx+R=\pm\sqrt{n}\times\overline{kxx+lx+m}$. Etenim hæc æquatio, quadrando partes & auferendo utrobique terminos ad dextram, producet æquationem propoſitam. Quod ſi ea omnia in nullo caſu evenerint, reductio erit impoſſibilis, ſi modo prius conſtet æquationem per diviſorem rationalem reduci non poſſe.

Exempli

Digitized by Google

Exempli gratia, proponatur æquatio $x^6 - 2ax^5 + 2bbx^4 + 2abbx^3 \begin{matrix} -2aabb \\ +2a^3b \\ -4ab^3 \end{matrix} xx \begin{matrix} +3aab^4 \\ -a^4bb \end{matrix} = 0$, & ſcribendo $-2a, +2bb, +2abb, -2aabb+2a^3b-4ab^3, 0,$ & $3aab^4-a^4bb$ pro $p, q, r, s, t,$ & v reſpectivè, prodibunt $2bb-aa=\alpha$. $4abb-a^3=\beta$. $2a^3b+2aabb-4ab^3-a^4=\gamma$. $-b^4+2a^3b+3aabb-4ab^3-\frac{3}{4}a^4=\zeta$. $-\frac{1}{2}a^5+3a^3bb-4ab^4=\eta$. & $-aab^4+a^4bb-\frac{1}{4}a^6=\theta$. Et terminorum $2\zeta, \eta,$ & 2θ communis diviſor eſt $aa-2bb$, ſeu $2bb-aa$ perinde ut aa vel $2bb$ majus ſit. Sed eſto aa majus quam $2bb$, & $aa-2bb$ erit n. Debet enim n ſemper affirmativum eſſe. Porro $\frac{\zeta}{n}$ eſt $-\frac{3}{4}aa+2ab+\frac{1}{2}bb$, $\frac{\eta}{n}$ eſt $-\frac{1}{2}a^3+2abb$, & $\frac{\theta}{n}$ eſt $\frac{1}{4}a^4+\frac{1}{2}aabb$, adeoque $\frac{\zeta}{2n} \times \frac{\theta}{n} - \frac{\eta\eta}{8nn}$ ſeu $\frac{\lambda}{2nn}$ eſt $\frac{1}{8}a^6-\frac{1}{4}a^5b-\frac{1}{8}a^4bb+\frac{1}{2}a^3b^3-\frac{3}{8}aab^4$, cujus diviſores ſunt $1, a, aa$; ſed quia $\sqrt{n} \times k$ non niſi unius dimenſionis eſſe poteſt, & $\sqrt{n}$ unius eſt, ideo k nullius erit; proinde non niſi numerus eſſe poteſt. Quare rejectis a & aa, reſtat ſolum 1 pro k. Præterea $\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}nkk$ dat nihil pro Q, & $\frac{Qr-QQp-t}{n}$ etiam nihil eſt; adeoque l, qui ejus diviſor eſſe debet, erit nihil. Denique $\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}pQ+nkl$ dat abb pro R. Et $RR-v$, eſt $-2aab^4+a^4bb$, quod dividi poteſt per n ſeu $aa-2bb$, & quoti $aabb$ radix extrahi, & radix illa negative ſumpta, nempe $-ab$, indefinitæ quantitati $\frac{QR-\frac{1}{2}t}{nl}$ ſeu $\frac{0}{0}$ non eſt inæqualis, quantitati vero definitæ $\frac{QQ+pR-nll-s}{2nk}$ æqualis eſt. Quamobrem radix illa $-ab$ erit m, & loco æquationis propoſitæ ſcribi poteſt $x^3+\frac{1}{2}pxx+Qx+R=\sqrt{n}\times\overline{kxx+lx+m}$, i. e. $x^3-axx+abb=\sqrt{aa-2bb}\times\overline{xx-ab}$. Cujus concluſionis veritatem probare potes quadrando partes æquationis inventæ & auferendo terminos ad dextram ex utraque parte. Ea enim operatione producetur æquatio $x^6 - 2ax^5+2bbx^4+2abbx^3 - 2aabbxx+2a^3bxx-4ab^3xx+3aab^4-a^4bb=0$, quæ reducenda proponebatur.

Si æquatio eſt octo *dimenſionum ſit ea* $x^8+px^7+qx^6+rx^5+sx^4+tx^3+vxx+wx+z=0$, & fiat $q-\frac{1}{4}pp=\alpha$. $r-\frac{1}{2}p\alpha=\beta$. $s-\frac{1}{2}p\beta-\frac{1}{4}\alpha\alpha=\gamma$. $t-\frac{1}{2}p\gamma-\frac{1}{2}\alpha\beta=\delta$. $v-\frac{1}{2}\alpha\gamma-\frac{1}{4}\beta\beta=\varepsilon$. $w-\frac{1}{2}\beta\gamma=\zeta$. & $z-\frac{1}{4}\gamma\gamma=\eta$. Et terminorum 2δ, 2ε, 2ζ, 8η, quære communem diviſorem qui integer ſit, & non quadratus nec per quadratum diviſibilis, quique etiam per 4 diviſus relinquat unitatem, ſi modo terminorum alternorum p, r, t, w aliquis ſit impar. Si nullus eſt ejuſmodi diviſor communis, certum eſt æquationem per extractionem ſurdæ radicis quadraticæ reduci non poſſe, & ſi non poteſt ea ita reduci, vix occurret illarum omnium quatuor quantitatum diviſor communis. Opuſculum igitur hactenus inſtitutum examinatio quædam eſt utrum æquatio reducibilis ſit necne, adeoque cum ejuſmodi reductiones raro poſſibiles ſint, finem operi ut plurimum imponet.

Et ſimili ratione ſi æquatio ſit decem, duodecim, vel plurium dimenſionum, impoſſibilitas reductionis cognoſci poteſt.

Ut ſi ea ſit $x^{10}+px^9+qx^8+rx^7+sx^6+tx^5+vx^4+ax^3+bxx+cx+d=0$, faciendum erit $q-\frac{1}{4}pp=\alpha$, $r-\frac{1}{2}p\alpha=\beta$, $s-\frac{1}{2}p\beta-\frac{1}{4}\alpha\alpha=\gamma$, $t-\frac{1}{2}p\gamma-\frac{1}{2}\alpha\beta=\delta$, $v-\frac{1}{2}p\delta-\frac{1}{2}\alpha\gamma-\frac{1}{4}\beta\beta=\varepsilon$, $a-\frac{1}{2}\alpha\delta-\frac{1}{2}\beta\gamma=\zeta$, $b-\frac{1}{2}\beta\delta-\frac{1}{4}\gamma\gamma=\eta$, $c-\frac{1}{2}\gamma\delta=\theta$, $d-\frac{1}{4}\delta\delta=\kappa$, & quærendus communis diviſor terminorum quinque 2ε, 2ζ, 8η, 4θ, 8κ, qui integer ſit & non quadratus, quique etiam per 4 diviſus relinquat unitatem ſi modo terminorum alternorum p, r, t, a, c aliquis ſit impar.

Sic ſi *duodecim* dimenſionum æquatio ſit $x^{12}+px^{11}+qx^{10}+rx^9+sx^8+tx^7+vx^6+ax^5+bx^4+cx^3+dxx+ex+f=0$, faciendum erit $q-\frac{1}{4}pp=\alpha$, $r-\frac{1}{2}p\alpha=\beta$, $s-\frac{1}{2}p\beta-\frac{1}{4}\alpha\alpha=\gamma$, $t-\frac{1}{2}p\gamma-\frac{1}{2}\alpha\beta=\delta$, $v-\frac{1}{2}p\delta-\frac{1}{2}\alpha\gamma-\frac{1}{4}\beta\beta=\varepsilon$, $a-\frac{1}{2}p\varepsilon-\frac{1}{2}\alpha\delta-\frac{1}{2}\beta\gamma=\zeta$, $b-\frac{1}{2}\alpha\varepsilon-\frac{1}{2}\beta\delta-\frac{1}{4}\gamma\gamma=\eta$, $c-\frac{1}{2}\beta\varepsilon-\frac{1}{2}\gamma\delta=\theta$, $d-\frac{1}{2}\gamma\varepsilon-\frac{1}{4}\delta\delta=\kappa$, $e-\frac{1}{2}\delta\varepsilon=\lambda$, $f-\frac{1}{4}\varepsilon\varepsilon=\mu$, & quærendus communis diviſor integer & non quadratus terminorum, ſex 2ζ, 8η, 4θ, 8κ, 4λ, 8μ qui per 4 diviſus relinquat unitatem, ſi modo terminorum alternorum p, r, t, a', c, e aliquis ſit impar.

Atque ita in infinitum progredi licebit, & æquatio propoſita ſemper per extractionem ſurdæ radicis quadraticæ irreducibilis erit ubi ejuſmodi diviſor communis nullus eſt. Siquando vero ejuſmodi diviſor

viſor n inventus ſpem faciat futuræ reductionis, poteſt ea inſtitui inſiſtendo veſtigiis operis quod in æquatione octo dimenſionum ſubjungimus.

Quære numerum quadratum cui per n multiplicato ultimus æquationis terminus z, ſub ſigno proprio adnexus quadratum numerum efficit. Id autem expedite fiet ſi ad z ubi n eſt par vel ad $4z$ ubi n eſt impar ſucceſſive addantur n, $3n$, $5n$, $7n$, $9n$, $11n$, & deinceps donec ſumma æqualis fiat numero alicui in tabula numerorum quadratorum quam ad manus eſſe ſuppono. Et ſi nullus ejuſmodi quadratus numerus prius occurrit quam ſummæ illius radix quadratica aucta radice quadratica exceſſus illius ſummæ ſupra ultimum æquationis terminum, quadruplo major ſit quam maximus terminorum æquationis propoſitæ p, q, r, s, t, v, &c. non opus erit rem ultra tentare. Æquatio enim reduci non poteſt. Sed ſi ejuſmodi numerus quadratus prius occurrit, ſit ejus radix S, ſi n eſt par, vel $2S$ ſi n eſt impar; & $\sqrt{\frac{SS-z}{n}}$ dic b. Debent autem S & b eſſe numeri integri ſi n eſt par, at ſi n impar eſt, poſſunt eſſe fracti denominatorem habentes numerum binarium. Et ſi unus eorum fractus eſt, alter fractus eſſe debet. Quod idem de numeris R & m, Q & l, p & k, poſt inveniendis obſervandum eſt. Et omnes numeri S & b, qui intra præfatum limitem inveniri poſſunt in catalogum referendi ſunt.

Poſtea pro k tentandi ſunt omnes numeri ſucceſſive qui non efficiunt $nk \pm \frac{1}{2}p$, quadruplo majus quam maximus terminus æquationis, & ponendum eſt in omni caſu $\frac{nkk+\alpha}{2}=Q$. Dein pro l tentandi ſunt ſucceſſive numeri omnes qui non efficiunt $nl \pm Q$, quadruplo majus quam maximus terminus æquationis, & in omni tentamine ponendum $\frac{-npkk+2\beta}{4}+nkl=R$. Denique pro m tentandi ſunt ſucceſſive omnes numeri qui non efficiunt $nm \pm R$ quadruplo majus quam maximus terminorum æquationis, & videndum an in caſu quovis ſi fiat $s-QQ-pR+nll=2H$, & $H+nkm=S$, ſit S aliquis numerorum qui prius pro S in Catalogum relati erat; & præterea

tereà ſi alter numerus ei S reſpondens, qui pro b in eundem Catalogum relatus erat ſit his tribus $\frac{2RS-w}{2nm}$, $\frac{2QS+RR-v-nmm}{2nl}$ & $\frac{pS+2QR-t-2nlm}{2nk}$ æqualis. Si hæc omnia in aliquo caſu evenerint, vice æquationis propoſitæ ſcribenda erit hæcce $x^4+\frac{1}{2}px^3+Qxx+Rx+S=\sqrt{n}\times\overline{kx^3+lxx+mx+b}$.

Exempli gratia proponatur æquatio $x^8+4x^7-x^6-10x^5+5x^4-5x^3-10xx-10x-5=0$. Et erit $q-\frac{1}{4}pp=-1-4=-5=\alpha$. $r-\frac{1}{2}p\alpha=-10+10=0=\beta$. $s-\frac{1}{2}p\beta-\frac{1}{4}\alpha\alpha=5-\frac{25}{4}=-\frac{5}{4}=\gamma$. $t-\frac{1}{2}p\gamma-\frac{1}{2}\alpha\beta=-5+\frac{5}{2}=-\frac{5}{2}=\delta$. $v-\frac{1}{2}\alpha\gamma-\frac{1}{4}\beta\beta=-10-\frac{25}{8}=-\frac{105}{8}=\epsilon$. $w-\frac{1}{2}\beta\gamma=-10=\zeta$. $z-\frac{1}{4}\gamma\gamma=-5-\frac{25}{64}=-\frac{345}{64}=\eta$. Ergo 2δ, 2ϵ, 2ζ, 8η, reſpective, ſunt -5, $-\frac{105}{4}$, -20, & $-\frac{345}{8}$, & earum diviſor communis 5, qui per 4 diviſus relinquit 1, perinde ut ob terminum imparem s oportuit. Cum itaque inventus ſit diviſor communis n ſeu 5 qui ſpem facit futuræ reductionis, quoniam iſte impar eſt, ad $4z$ ſeu -20 ſucceſſive addo n, $3n$, $5n$, $7n$, $9n$, &c. ſeu 5, 15, 25, 35, 45, &c. & prodeunt -15. 0. 25. 60. 105. 160. 225. 300. 385. 480. 585. 700. 825. 960. 1105. 1260. 1425. 1600. Ex quibus ſolum 0. 25. 225, & 1600 quadrati ſunt. Quare horum radices dimidiatæ 0, $\frac{5}{2}$, $\frac{15}{2}$, 20, in catalogum referendæ ſunt pro S, & $\sqrt{\frac{SS-z}{n}}$, id eſt 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{2}$, 9, reſpective pro b. Sed quia $S+nb$ ſi ſcribatur 20 pro S & 9 pro b, fit 65 numerus major quadruplo maximi terminorum æquationis, ideo rejicio 20 & 9, & reliquos ſolum refero in tabulam ut ſequitur.

b	1. $\frac{3}{2}$. $\frac{7}{2}$.
S	0. $\frac{5}{2}$. $\frac{15}{2}$.

His ita diſpoſitis, tento pro k numeros omnes qui non efficiunt $\frac{1}{2}p\pm nk$ ſeu $2\pm 5k$ majus quadruplo maximi termini æquationis 40, id eſt numeros -8. -7. -6. -5. -4. -3. -2. -1. 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7, ponendo $\frac{nkk+\alpha}{2}$ ſeu $\frac{5kk-5}{2}$ id eſt numeros $\frac{315}{2}$. 120. $\frac{175}{2}$. 60. $\frac{75}{2}$. 20. $\frac{15}{2}$. 0. $-\frac{5}{2}$. 0. $\frac{15}{2}$. 20. $\frac{75}{2}$. 60. $\frac{175}{2}$. 120.

re-

reſpective pro Q. Imo vero cum $Q \pm nl$, & multo magis Q non debeat majus eſſe quam 40, rejiciendos eſſe ſentio $\frac{165}{2}$. 120. $\frac{75}{2}$ & 60, & qui his reſpondent -8. -7. -6. -5. 5. 6. 7. adeoque ſolos -4. -3. -2. -1. 0. 1. 2. 3. 4 pro k & $\frac{75}{2}$. 20. $\frac{15}{2}$. 0. $-\frac{5}{2}$. 0. $\frac{15}{2}$. 20. $\frac{75}{2}$. pro Q reſpective tentandos. Tentemus autem -1 pro k & 0 pro Q, & in hoc caſu pro l tentandi deinceps erunt ſucceſſive omnes numeri qui non efficiunt $Q \pm nl$ majus quam 40, id eſt omnes numeri inter 10 & -10, & pro R reſpective numeri $\frac{2\beta - npkk}{4} + nkl$, ſeu $-5 - 5l$ id eſt -55. -50. -45. -40. -35. -30. -25. -20. -15. -10. -5. 0. 5. 10. 15. 20. 25. 30. 35. 40. 45, quorum tamen tres priores & ultimum quia majores quam 40 negligere licebit. Tentemus autem -2 pro l & 5 pro R, & in hoc caſu pro m tentandi præterea erunt omnes numeri qui non efficiunt $R \pm nm$ ſeu $5 \pm 5m$ majus quam 40, id eſt numeri omnes inter 7 & -9, & videndum an ſi ponendo $s - QQ - pR + nll$, id eſt $5 - 20 + 20$ ſeu $5 = 2H$, ſit $H + nkm$ ſeu $\frac{5}{2} - 5m = S$, id eſt ſi ex his numeris $\frac{-65}{2}$. $\frac{-55}{2}$. $\frac{-45}{2}$. $\frac{-35}{2}$. $\frac{-25}{2}$. $\frac{-15}{2}$. $\frac{-5}{2}$. $\frac{5}{2}$. $\frac{15}{2}$. $\frac{25}{2}$. $\frac{35}{2}$. $\frac{45}{2}$. $\frac{55}{2}$. $\frac{65}{2}$. $\frac{75}{2}$. $\frac{85}{2}$, aliquis æqualis ſit alicui numerorum 0. $\pm\frac{5}{2}$. $\pm\frac{15}{2}$ qui prius in tabulam pro S relati erant. Et hujuſmodi quatuor occurrunt $-\frac{15}{2}$. $-\frac{5}{2}$. $\frac{5}{2}$. $\frac{15}{2}$ quibus reſpondent $\pm\frac{7}{2}$. $\pm\frac{3}{2}$, $\pm\frac{3}{2}$. $\pm\frac{7}{2}$ pro b in eadem tabula ſcripti, ut & 2. 1. 0. -1 pro m ſubſtitui. Verum tentemus $-\frac{5}{2}$ pro S, 1 pro m, & $\pm\frac{3}{2}$ pro b, & fiet $\frac{2RS - w}{2nm} = \frac{-25+10}{10} = -\frac{3}{2}$, & $\frac{2QS + RR - v - nmm}{2nl} = \frac{25+10-5}{-20} = -\frac{3}{2}$, & $\frac{pS + 2QR - t - 2nlm}{2nk} = \frac{-10+5+20}{-10} = -\frac{3}{2}$, Quare cum prodeat omni caſu $-\frac{3}{2}$ ſeu b, concludo numeros omnes recte inventos eſſe, adeoque vice æquationis propoſitæ ſcribendum eſſe $x^4 + \frac{1}{2}px^3 + Qxx + Rx + S = \sqrt{n \times \overline{kx^3 + lxx + mx + b}}$, id eſt $x^4 + 2x^3 + 5x - 2\frac{1}{2} = \sqrt{5} \times$

$\times \overline{-x^3-2xx+x-1}\,|^{\frac{1}{2}}$. Etenim quadrando partes hujus, producetur æquatio illa octo dimenſionum quæ ſub initio proponebatur.

Quod ſi tentando caſus omnes numerorum, prædicti valores omnes ipſius b nullo in caſu inter ſe conſenſiſſent, argumento fuiſſet æquationem per extractionem ſurdæ radicis quadraticæ reduci non potuiſſe.

Deberent autem aliqua hic in operis abbreviationem annotari, ſed quæ brevitatis cauſa prætereo, cum tantarum reductionum perexiguus ſit uſus, & rei poſſibilitatem potius quam praxin commodiſſimam voluerim exponere. Sunt igitur hæ reductiones æquationum per extractionem *ſurdæ radicis quadraticæ*.

Adjungere jam liceret reductiones æquationum per *extractionem ſurdæ radicis cubicæ*, ſed & has, ut quæ perraro utiles ſint, brevitatis gratia prætereo.

Sunt tamen reductiones quædam *cubicarum æquationum* vulgo notæ, quas, ſi penitus præterirem, Lector fortaſſe deſideraret. Proponatur æquatio cubica $x^3 * + qx + r = 0$, cujus ſecundus terminus deeſt. Ad hanc enim formam æquationem omnem cubicam reduci poſſe conſtat ex præcedentibus. Et ſupponatur x eſſe $= a + b$. Erit $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$ (id eſt x^3) $+ qx + r = 0$. Sit $3aab + 3abb$ (id eſt $3abx$) $+ qx = 0$, & erit $a^3 + b^3 + r = 0$. Per priorem æquationem eſt $b = -\frac{q}{3a}$, & cubice $b^3 = -\frac{q^3}{27a^3}$. Ergo per poſteriorem eſt $a^3 - \frac{q^3}{27a^3} + r = 0$, ſeu $a^6 + ra^3 = \frac{q^3}{27}$, & per extractionem affectæ radicis quadraticæ $a^3 = -\frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}$. Extrahe radicem cubicam & habebitur a. Et ſupra erat $-\frac{q}{3a} = b$, & $a + b = x$. Ergo $a - \frac{q}{3a}$ radix eſt æquationis propoſitæ.

Exempli gratia proponatur æquatio $y^3 - 6yy + 6y + 12 = 0$. Ad tollendum ſecundum æquationis hujus terminum ponatur $x + 2 = y$, & orietur $x^3 * - 6x + 8 = 0$, ubi eſt $q = -6$, $r = 8$, $\frac{1}{4}rr = 16$,

q^3

$\frac{q^3}{27} = -8$, $a^3 = -4 \pm \sqrt{8}$, $a - \frac{q}{3a} = x$, & $x + 2 = y$, id eſt $2 + \sqrt[3]{-4 \pm \sqrt{8}} + \frac{2}{\sqrt[3]{-4 \pm \sqrt{8}}} = y$.

Et hoc modo erui poſſunt radices omnium cubicarum æquationum ubi q affimativum. eſt; vel etiam ubi q negativum eſt, & $\frac{q^3}{27}$ non majus quam $\frac{1}{4}rr$, *id eſt ubi duæ ex radicibus æquationis ſunt impoſſibiles.* At ubi q negativum eſt, & $\frac{q^3}{27}$ ſimul majus quam $\frac{1}{4}rr$, fit $\sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{q^3}{27}}$ quantitas impoſſibilis, atque adeo æquationis radix x vel y, hoc caſu impoſſibilis erit. Scilicet hoc caſu *tres ſunt radices poſſibiles* quæ omnes eodem modo ſe habent ad æquationis terminos q & r, & indifferenter deſignantur per literam x vel y, adeoque omnes eadem deberent lege erui & exprimi qua una aliqua eruitur & exprimitur: *Sed omnes tres lege præfata exprimere impoſſibile eſt.* Quantitas $a - \frac{q}{3a}$ qua x deſignatur multiplex eſſe non poteſt, eaque de cauſa Hypotheſis quod x, hoc in caſu ubi triplex eſt, æqualis eſſe poteſt binomio $a - \frac{q}{3a}$, ſeu $a + b$ cujus nominum cubi $a^3 + b^3$ conjunctim æquentur r, & triplum rectangulum $3ab$ æquetur q, plane impoſſibilis eſt; & ex hypotheſi impoſſibili concluſionem impoſſibilem colligi mirum eſſe non debet.

Eſt & alius modus has radices exprimendi. Nimirum de $a^3 + b^3 + r$ id eſt de nihilo, aufer $a^3 + r$, ſeu $\frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}$, & reſtabit $b^3 = -\frac{1}{2}r \mp \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}$. Eſt itaque $a = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}}$, & $b = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r - \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}}$; vel $a = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r - \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}}$, & $b = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}}$,

 adeo-

adeoque horum ſumma $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r+\sqrt{\frac{1}{4}rr+\frac{q^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r-\sqrt{\frac{1}{4}rr+\frac{q^3}{27}}}$, erit $=x$.

Poſſunt etiam æquationum biquadraticorum radices mediantibus cubicis erui & exprimi.

Tollendus eſt autem primum ſecundus æquationis terminus. Sit æquatio reſultans $x^4+qxx+rx+s=0$. Pone hanc multiplicatione duarum $xx+ex+f=0$, & $xx-ex+g=0$ generari, id eſt eandem eſſe cum hac $x^4 * \begin{matrix}+f\\+g\\-ee\end{matrix}\,xx\begin{matrix}+eg\\-ef\end{matrix}\,x+fg=0$, & collatis terminis fiet

$f+g-ee=q$, $eg-ef=r$, & $fg=s$. Quare $q+ee=f+g$, $\frac{r}{e}=g-f$,

$\frac{q+ee+\frac{r}{e}}{2}=g$. $\frac{q+ee-\frac{r}{e}}{2}=f$. $\frac{qq+2eeq+e^4-\frac{rr}{ee}}{4}(=fg)=s$, & per reductionem $e^6+2qe^4\begin{matrix}+qq\\-4s\end{matrix}\,ee-rr=0$. Pro ee ſcribo y, & fiet $y^3+2qyy\begin{matrix}+qq\\-4s\end{matrix}\,y-rr=0$, æquatio cubica cujus terminus ſecundus tolli poteſt, & radix deinceps per regulam præcedentem vel ſecus extrahi. Dein habita illa radice regrediendum erit ponendo $\sqrt{y}=e$, $\frac{q+ee-\frac{r}{e}}{2}=f$, $\frac{q+ee+\frac{r}{e}}{2}=g$, & æquationes duæ $xx+ex+f=0$, & $xx-ex+g=0$, extractis earum radicibus dabunt quatuor radices æquationis biquadraticæ $x^4+qxx+rx+s=0$, nimirum $x=-\frac{1}{2}e\pm\sqrt{\frac{1}{4}ee-f}$, & $x=\frac{1}{2}e\pm\sqrt{\frac{1}{4}ee-g}$. Ubi notandum eſt quod ſi æquationis biquadraticæ radices quatuor poſſibiles ſunt, æquationis cubicæ $y^3+2qyy\begin{matrix}+qq\\-4s\end{matrix}\,y-rr=0$ radices tres poſſibiles erunt, atque adeo per regulam præcedentem extrahi nequeunt. *Sic & ſi æquationis quinque vel plurium dimenſionum radices affectæ in radices non affectas mediis æquationis terminis quoque pacto ſublatis convertantur, illa radicum expreſſio ſemper erit impoſſibilis ubi plures quam*

una

Digitized by Google

una radix in æquatione imparium dimenſionum poſſibiles ſunt, aut plures quam duæ in æquatione parium dimenſionum quæ per extractionem ſurdæ radicis quadraticæ methodo ſupra expoſita reduci nequeunt.

Docuit *Carteſius* æquationem biquadraticam per regulas ultimo traditas reducere. *E. g.* proponatur æquatio à nobis ſupra reducta $x^4 - x^3 - 5xx + 12x - 6 = 0$. Tolle ſecundum terminum ſcribendo $v + \frac{1}{4}$ pro x, & orietur $v^4 - \frac{43}{8}vv + \frac{75}{8}v - \frac{851}{256} = 0$. Ad tollendas fractiones ſcribe $\frac{1}{4}z$ pro v, & orietur $z^4 - 86zz + 600z - 851 = 0$. Hic eſt $-86 = q$, $600 = r$, & $-851 = s$, adeoque $y^3 + 2qyy \begin{matrix} + qq \\ - 4s \end{matrix} y - rr = 0$, ſubſtitutis æquipollentibus fiet $y^3 - 172yy + 10800y - 360000 = 0$. Ubi tentando omnes ultimi termini diviſores $1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5$, & deinceps uſque ad 100 invenietur tandem $y = 100$. Quod idem multo expeditius per methodum à nobis ſupra expoſitam invenire potuit.

Dein habito y, radix ejus 10 erit e, & $\frac{q + ee - \frac{r}{e}}{2}$, id eſt $\frac{-86 + 100 - 60}{2}$,

ſeu -23 erit f, & $\frac{q + ee + \frac{r}{e}}{2}$ ſeu 37 erit g, adeoque æquationes $xx + ex + f = 0$, & $xx - ex + g = 0$, ſcripto z pro x, & ſubſtitutis æquipollentibus evadent $zz + 10z - 23 = 0$, & $zz - 10z + 37 = 0$. Reſtitue v pro $\frac{1}{4}z$, & orientur $vv + 2\frac{1}{2}v - \frac{23}{16} = 0$, & $vv - 2\frac{1}{2}v + \frac{37}{16} = 0$. Reſtitue inſuper $x - \frac{1}{4}$ pro v, & emergent $xx + 2x - 2 = 0$, & $xx - 3x + 3 = 0$, æquationes duæ quarum radices quatuor $x = -1 \pm \surd 3$, & $x = 1\frac{1}{2} \pm \surd -\frac{3}{4}$, eædem ſunt cum radicibus quatuor æquationis biquadraticæ ſub initio propoſitæ $x^4 - x^3 - 5xx + 12x - 6 = 0$. Sed hæc facilius per methodum inveniendi diviſores à nobis ſupra explicatam invenire potuerunt.

ÆQUATIONUM

Conſtructio linearis.

Hactenus æquationum proprietates; transmutationes, limites & omnis generis reductiones, docui. Demonſtrationes non ſemper adjunxi quoniam ſatis faciles mihi viſæ ſunt, & nonnunquam abſque nimiis ambagibus tradi non poſſent. Reſtat jam tantum ut æquationum poſtquam ad formam commodiſſimam reductæ ſunt, radices in numeris extrahere doceam. Et hic præcipua difficultas eſt in figuris duabus vel tribus prioribus obtinendis. Id quod commodiſſime per æquationis conſtructionem aliquam ſeu Geometricam ſive Mechanicam conſit. Qua de cauſa non pigebit hujuſmodi conſtructiones aliquas ſubjungere.

Veteres, ut ex Pappo diſcimus, triſectionem anguli, & inventionem duarum medie proportionalium, ſub initio per rectam lineam & circulum, fruſtra aggreſſi ſunt. Poſtea conſiderare cœperunt alias permultas lineas, ut Conchoidem, Ciſſoidem, & Conicas ſectiones, & per harum aliquas ſolverunt Problemata. Tandem re penitius examinata, & Conicis ſectionibus in Geometriam receptis Problemata diſtinxerunt in tria genera: *Plana* quæ per lineas, à plano originem derivantes, Rectam nempe & Circulum ſolvi poſſint; *Solida* quæ per lineas ortum à ſolidi id eſt Coni conſideratione derivantes ſolvebantur; & *Linearia* ad quorum ſolutionem requirebantur lineæ magis compoſitæ. Et juxta hanc diſtinctionem, problemata ſolida per alias lineas quam Conicas ſectiones ſolvere à Geometria alienum eſt; præſertim ſi nullæ aliæ lineæ præter rectam, circulum, & Conicas ſectiones in Geometriam recipiantur. At Recentiores longius progreſſi receperunt lineas omnes in Geometriam quæ per æquationes exprimi poſſunt, & pro dimenſionibus æquationum diſtinxerunt lineas illas in genera, legemque tulerunt non licere Problema per

per lineam ſuperioris generis conſtruere quod conſtrui poteſt per lineam inferioris. In lineis contemplandis, & eruendis earum proprietatibus, diſtinctionem earum in genera juxta dimenſiones æquationum per quas definiuntur laudo. At æquatio non eſt, ſed deſcriptio quæ curvam Geometricam efficit. Circulus linea Geometrica eſt, non quod per æquationem exprimi poteſt; ſed quod deſcriptio ejus poſtulatur. Æquationis ſimplicitas non eſt, ſed deſcriptionis facilitas, quæ lineam ad conſtructiones Problematum prius admittendam eſſe indicat. Nam æquatio ad Parabolam ſimplicior eſt quam æquatio ad circulum; & tamen circulus ob ſimpliciorem deſcriptionem prius admittitur. Circulus & Coni ſectiones ſi æquationum dimenſiones ſpectentur ejuſdem ſunt ordinis, & tamen circulus in conſtructione problematum non connumeratur cum his, ſed ob ſimplicem deſcriptionem deprimitur ad ordinem inferiorem lineæ rectæ; ita ut per circulum conſtruere quod per rectas conſtrui poteſt, non ſit illicitum; per Conicas vero ſectiones conſtruere quod per circulum conſtrui poteſt vitio vertatur. Aut igitur legem à dimenſionibus æquationum in circulo obſervandam eſſe ſtatue, & ſic diſtinctionem inter problemata plana & ſolida ut vitioſam tolle; aut concede legem illam in lineis ſuperiorum generum non ita obſervandam eſſe quin aliquæ ob ſimpliciorem deſcriptionem præferantur aliis ejuſdem ordinis, & in conſtructione Problematum cum lineis inferiorum ordinum connumerentur. In conſtructionibus quæ ſunt æque Geometricæ præferendæ ſemper ſunt ſimpliciores. Hæc lex omni exceptione major eſt. Ad ſimplicitatem vero conſtructionis expreſſiones Algebraicæ nil conferunt. Solæ deſcriptiones linearum hic in cenſum veniunt. Has ſolas conſiderabant Geometræ qui circulum conjungebant cum recta. Prout hæ ſunt faciles vel difficiles conſtructio facilis vel difficilis redditur. Adeoque à rei natura alienum eſt leges conſtructionibus aliunde præſcribere. Aut igitur lineas omnes præter rectam & circulum & forte Conicas ſectiones è Geometria cum Veteribus excludamus, aut admittamus omnes ſecundum deſcriptionis ſimplicitatem. Si Trochoides in Geometriam reciperetur, liceret ejus beneficio angulum in data ratione ſecare. Numquid ergo reprehenderes ſiquis hac linea ad dividendum angulum in ratione numeri ad numerum uteretur, & contenderes hanc lineam

per

per æquationem non definiri, lineas vero quæ per æquationes definiuntur adhibendas eſſe? Igitur ſi angulus *e. g.* in 10001 partes dividendus eſſet, teneremur curvam lineam æquatione pluſquam centum dimenſionum definitam in medium afferre, quam tamen nemo mortalium deſcribere nedum intelligere valeret; & hanc anteponere Trochoidi quæ linea notiſſima eſt, & per motum rotæ vel circuli facillime deſcribitur. Quod quam abſurdum ſit quis non videt? Aut igitur Trochoides in Geometriam non eſt admittenda, aut in conſtructione Problematum curvis omnibus difficilioris deſcriptionis anteferenda. Et eadem eſt ratio de reliquis curvis. Quo nomine triſectiones anguli per Conchoidem quas *Archimedes* in Lemmatis & *Pappus* in collectionibus poſuere, præ aliorum hac de re inventis omnibus, laudamus; ſiquidem lineas omnes præter rectam & circulum è Geometria excludere debeamus, aut ſecundum deſcriptionis ſimplicitatem admittere, & Conchoides ſimplicitate deſcriptionis nulli curvæ præter circulum cedit. Æquationes ſunt expreſſiones computi Arithmetici, & in Geometria locum proprie non habent, niſi quatenus quantitates vere Geometricæ (id eſt lineæ, ſuperficies, ſolida & proportiones) aliquæ aliis æquales enunciantur. Multiplicationes, Diviſiones, & ejuſmodi computa in Geometriam recens introducta ſunt; idque inconſulto, & contra primum inſtitutum ſcientiæ hujus. Nam qui conſtructiones Problematum per rectam & circulum à primis Geometris adinventas conſiderabit, facile ſentiet Geometriam excogitatam eſſe ut expedito linearum ductu effugeremus computandi tædium. Proinde hæ duæ ſcientiæ confundi non debent. Veteres tam ſedulo diſtinguebant eas ab invicem, ut in Geometriam terminos Arithmeticos nunquam introduxerint. Et recentes utramque confundendo amiſerunt ſimplicitatem in qua Geometriæ elegantia omnis conſiſtit. Eſt itaque *Arithmeticæ* quidem ſimplicius quod per ſimpliciores æquationes determinatur, at *Geometricæ* ſimplicius eſt quod per ſimpliciorem ductum linearum colligitur; & in Geometria prius & præſtantius eſſe debet quod eſt ratione Geometrica ſimplicius. Mihi igitur vitio vertendum non erit ſi cum Mathematicorum Principe, *Archimede*, aliiſque Veteribus Conchoidem ad Solidorum problematum conſtructionem adhibeam. Attamen ſiquis aliter ſenſerit, ſciat me hic de conſtructione non Geometrica ſed

qua-

Digitized by Google

qualicunque ſollicitum eſſe, qua radices æquationum in numeris proxime aſſequar. Cujus rei gratia præmitto hoc Problema Lemmaticum.

Inter datas duas lineas AB, AC rectam datæ longitudinis BC ponere quæ producta tranſeat per datum punctum P.

Si circa polum P gyret linea BC, & ſimul termino ejus C incedat ſuper recta AC, ejus alter terminus B deſcribet Conchoidem Veterum. Secet hæc lineam AB in puncto B. Junge PB, & ejus pars BC erit recta quam ducere oportuit. Et eadem lege linea BC duci poteſt ubi vice rectæ AC linea aliqua curva adhibetur. Tab. IX. Fig. 1.

Sicui conſtructio hæcce per Conchoidem minus placeat, poteſt alia per Conicam ſectionem ejus vice ſubſtitui. A puncto P ad rectas AD, AE age PD, PE conſtituentes parallelogrammum EADP, & à punctis C ac D ad rectam AB demitte perpendicula CF, DG, ut & à puncto E ad rectam AC verſus A productam perpendiculum EH, & dictis $AD=a$. $PD=b$. $BC=c$. $AG=d$, $AB=x$, & $AC=y$. Erit AD.AG::AC.AF, adeoque $AF=\frac{dy}{a}$. Erit & AB.AC::PD.CD, ſeu $x.y::b.a-y$. Ergo $by=ax-yx$, quæ æquatio eſt ad Hyperbolam. Rurſus per 13. II. *Elem.* erit $BCq=ACq+ABq-2FAB$, id eſt $cc=yy+xx-\frac{2dxy}{a}$. Prioris æquationis partes ductas in $\frac{2d}{a}$ aufer de partibus hujus, & reſtabit $cc-\frac{2bdy}{a}=yy+xx-2dx$, æquatio ad circulum, ubi x & y ad rectos ſunt angulos. Quare ſi haſce duas lineas Hyperbolam & Circulum ope harum æquationum componas, earum interſectione habebis x & y, ſeu AB & AC quæ poſitionem rectæ BC determinant. Componentur autem lineæ illæ ad hunc modum.

Duc rectas duas quaſvis KL æqualem AD, & KM æqualem Tab. IX. Fig. 2.

Digitized by Google

PD continentes angulum rectum MKL. Comple parallelogrammum KLMN, & aſymptotos LN, MN per punctum K deſcribe Hyperbolam IKX.

In KM verſus K producta cape KP æqualem AG & KQ æqualem BC. Et in KL producta verſus K cape KR æqualem AH, & RS æqualem RQ. Comple parallelogrammum PKRT, & centro T intervallo TS deſcribe circulum. Secet hic Hyperbolam in puncto X. Ad KP demitte perpendiculum XY, & erit XY æqualis AC & KY æqualis AB. Quæ duæ lineæ AC & AB vel una earum cum puncto P determinant poſitionem quæſitam rectæ BC. Cui conſtructioni demonſtrandæ, & ejus caſibus ſecundum caſus Problematis determinandis non immoror.

Hac, inquam, conſtructione ſolvi poteſt Problema ſicui ita viſum ſit. Sed hæc ſolutio magis compoſita eſt quam ut uſibus ullis inſervire poſſit. Nuda ſpeculatio eſt, & ſpeculationes Geometricæ tantum habent elegantiæ quantum ſimplicitatis, tantumque laudis merentur quantum utilitatis ſecum afferunt. Ea de cauſa conſtructionem per Conchoidem præfero ut multo ſimpliciorem, & non minus Geometricam; & quæ reſolutioni æquationum à nobis propoſitæ optime conducit. Præmiſſo igitur præcedente Lemmate conſtruimus Geometrice Problemata cubica, & quadrato-quadratica (*utpote quæ ad cubica reduci poſſunt*) ut ſequitur.

Tab. IX. Fig. 3. 4. 5. *Proponatur æquatio cubica* $x^3 * + qx + r = 0$, *cujus terminus ſecundus deeſt, tertius vero ſub ſigno ſuo deſignatur per* $+q$ *& quartus per* $+r$.

Duc quamlibet KA quam dic n. In KA utrinque producta cape $KB = \frac{q}{n}$ ad eaſdem partes cum KA ſi habeatur $+q$, aliter ad contrarias. Biſeca BA in C, & centro K radio KC fac circulum CX, cui inſcribe rectam CX æqualem $\frac{r}{nn}$, & produc eam utrinque. Dein junge AX & produc eam utrinque. Denique inter has lineas CX & AX inſcribe EY ejuſdem longitudinis cum CA, quæque producta tranſeat per punctum K, & XY erit radix æquationis. Et ex his radicibus affirmativæ erunt quæ cadunt ad partes X verſus C, & negativæ quæ cadunt ad partes contrarias, ſi habeatur $+r$, & contra ſi habeatur $-r$.

De-

Demonſtratio.

Ad demonſtrationem præmittimus Lemmata ſequentia.

Lem. I. *Eſt YX ad AK ut CX ad KE.* Etenim age KF parallelam CX, & ob ſimilia triangula ACX, AKF, & EYX, EKF, erit AC ad AK ut CX ad KF, & YX ad YE ſeu AC ut KF ad KE, adeoque ex æquo perturbate YX ad AK ut CX ad KE. Q. E. D.

Lem. II. *Eſt YX ad AK ut CY ad AK+KE.* Nam componendo eſt YX ad AK ut YX+CX, id eſt CY ad AK+KE. Q. E. D.

Lem. III. *Eſt KE−BK ad YX ut YX ad AK.*

Nam per 12. II. *Elem.* eſt $YKq - CKq = CYq - CY \times CX = CY \times YX$, hoc eſt ſi Theorema reſolvatur in proportionem CY ad YK−CK ut YK+CK ad YX. Sed eſt $YK - CK = YK - YE + CA - CK = KE - BK$. Et $YK + CK = YK - YE + CA + CK = KE + AK$. Adeoque eſt CY ad KE−BK ut KE+AK ad YX. Sed per *Lemma ſecundum* erat CY ad KE+AK ut YX ad AK. Ergo ex æquo eſt YX ad KE−BK ut AK ad YX. Seu KE−BK ad YX ut YX ad AK. Q. E. D.

His præmiſſis Demonſtrabitur Theorema ut ſequitur. In *primo Lemmate* erat YX ad AK ut CX ad KE, ſeu $KE \times YX = AK \times CX$. In *tertio* erat KE−BK ad YX ut YX ad AK. Unde ſi prioris rationis termini ducantur in YX fiet $KE \times YX - BK \times YX$ ad YXq ut YX ad AK, id eſt $AK \times CX - BK \times YX$ ad YXq ut YX ad AK, & ductis extremis & mediis in ſe $AKq \times CX - AK \times BK \times YX = YX$ *cub.* Denique pro YX, AK, BK, & CX reſtitutis x, n, $\frac{q}{n}$, & $\frac{r}{nn}$ orietur $r - qx = x^3$. Q. E. D. Quod vero ad ſignorum variationes attinet, iſtis ſecundum caſus Problematum determinandis non immoror.

Proponatur jam æquatio cujus tertius terminus deeſt $x^3 + pxx + r = 0$. Et ad ejus conſtructiones aſſumpto quolibet n, cape in recta aliqua longitudines duas $KA = \frac{r}{nn}$, & $KB = p$, idque ad eaſdem partes ſi r & p habeant eadem ſigna, aliter ad contrarias. Biſeca BA in C, & centro K radio KC deſcribe circulum cui inſcribe CX æqualem

n, & produc eam utrinque. Item junge AK, & produc eam utrinque. Denique inter has lineas CX & AX inſcribe EY ejuſdem longitudinis cum CA, ita ut ea ſi producatur tranſeat per K, & KE erit radix æquationis. Radices autem affirmativæ ſunt ubi punctum Y cadit à parte puncti X verſus C, & negativæ ubi punctum Y cadit ad alteras partes puncti X ſi modo habeatur $+r$, & contra ſi habeatur $-r$.

Ad hujus Propoſitionis demonſtrationem Schemata & Lemmata de priori propoſitione mutuo ſumantur, & *Demonſtratio* erit ut ſequitur.

Per *Lemma* 1, erat YX ad AK ut CX ad KE ſeu $YX \times KE = AK \times CX$, & per *Lemma* 3, $KE - KB$ ad YX ut YX ad AK, aut (ſumpto KB ad contrarias partes) $KE + KB$ ad YX ut YX ad AK, adeoque $KE + KB$ in KE ad $YX \times KE$, ſeu $AK \times CX$ ut YX ad AK, ſeu CX ad KE. Quare ductis extremis & mediis in ſe, eſt KE *cub.* $+ KB \times KEq = AK \times CXq$, & ipſarum KE, KB, AK, & CX reſtitutis valoribus ſupra aſſignatis, $x^3 + pxx = r$.

Proponimus jam æquationem trium dimenſionum $x^3 + pxx + qx + r = 0$, nullo termino carentem, & cujus tres radices non ſunt omnes affirmativæ neque omnes negativæ.

TAB. IX. Fig. 6. Et primo ſi terminus q *negativus* eſt, in recta aliqua KB capiantur longitudines duæ $KA = \frac{r}{q}$ & $KB = p$, idque ad eaſdem partes puncti K ſi p & $\frac{r}{q}$ habent ſigna diverſa; aliter ad contrarias. Biſeca AB in C, & ad punctum illud C erige perpendiculum CX æquale radici quadraticæ termini q: Et inter lineas rectas AX & CX, utrinque productas in infinitum inſcribatur recta EY quæ æqualis ſit rectæ AC, & producta tranſeat per punctum K, atque KE erit radix æquationis, quæ quidem affirmativa erit ſi punctum X cadat inter puncta A & E, negativa vero ſi punctum E cadat ad partes puncti X verſus A.

Quod ſi terminus q *affirmativus* eſt, in recta KB capiantur longitu-

gitudines illæ duæ $KA=\sqrt{\frac{-r}{p}}$, & $KB=\frac{q}{KA}$, idque ad eaſdem partes puncti K, ſi $\sqrt{\frac{-r}{p}}$ & $\frac{q}{KA}$ habent ſigna diverſa; aliter ad contrarias: Biſeca AB in C, & ad punctum illud C erige perpendiculum CX æquale termino p: & inter lineas rectas AX & CX, utrinque productas in infinitum inſcribatur recta EY quæ æqualis ſit rectæ AC, & producta tranſeat per punctum K, atque XY erit radix æquationis; quæ quidem negativa erit ſi punctum x cadat inter puncta A & E, affirmativa vero ſi punctum Y cadat ad partes puncti X verſus punctum C.

Demonſtratio caſus prioris.

Per *Lemma primum* erat KE ad CX ut AK ad YX, & ita (componendo) eſt KE+AK, id eſt KY+KC ad CX+YX, id eſt CY. Sed in triangulo rectangulo KCY eſt YCq æquale $YKq - KCq$, id eſt æquale KY+KC in KY—KC, & reſolvendo terminos æquales in proportionales, KY+KC ad CY ut CY ad KY—KC, ſeu KE+AK ad CY ut CY ad EK—KB. Quare cum in hac proportione fuerit KE ad CX; duplicetur proportio, & erit KEq ad CXq ut KE+AK ad KE—KB; & ductis extremis & mediis in ſe KE *cub.* $-KB \times KEq = CXq \times KE + CXq \times AK$. Et reſtitutis valoribus ſupra aſſignatis $x^3 - pxx = qx + r$.

Demonſtratio caſus ſecundi.

Per *Lemma primum* eſt KE ad CX ut AK ad YX, ductiſque extremis & mediis in ſe fit $KE \times YX = CX \times AK$. Scribe ergo in ſuperioribus $KE \times YX$ pro $CX \times AK$, & fiet KE *cub.* $-KB \times KEq = CXq \times KE + CX \times KE \times YX$. Et applicatis omnibus ad KE erit $KEq - KB \times KE = CXq + CX \times YX$: ductiſque omnibus in AK habebitur $AK \times KEq - AK \times KB \times KE = AK \times CXq + AK \times CX \times YX$: Ac rurſus ſcripto $KE \times YX$ pro $CX \times AK$, fiet $AK \times KEq - AK \times KB \times KE = KE \times YX \times CX + KE \times YXq$: & applicatis omnibus ad KE orietur $AK \times KE - AK \times KB = YX$

 $\times CX$

$\times CX + YXq$: ductiſque omnibus in YX emerget $AK \times KE \times YX - AK \times KB \times YX = YXq \times CX + YX$ *cub.* & pro $KE \times YX$ ſcriptis in primo termino $CX \times AK$, fiet $CX \times AKq - AK \times KB \times YX = CX \times YXq + YX$ *cub.* ſeu quod perinde eſt YX *cub.* $+ CX \times YXq + AK \times KB \times YX - CX \times AKq = 0$. Atque pro YX, CX, AK & KB ſubſtitutis valoribus ſupra aſſignatis x, p, $\sqrt{\frac{-r}{p}}$, $q\sqrt{\frac{p}{-r}}$ emerget tandem $x^3 + pxx + qx + r = 0$, æquatio conſtruenda.

Solvuntur etiam hæ æquationes ducendo rectam lineam datæ longitudinis inter circulum & aliam rectam poſitione datos, ea lege ut recta illa ducta convergat ad punctum datum.

Proponatur enim æquatio cubica $x^3 * + qx + r = 0$, *cujus terminus ſecundus deeſt.*

TAB. IX. Fig. 7. Duc rectam KA ad arbitrium. Eam dic n. In KA utrinque producta cape $KB = \frac{q}{n}$, idque ad eaſdem partes puncti K cum linea KA ſi modo habeatur $-q$, aliter ad diverſas. Biſeca BA in C, & centro A intervallo AC deſcribe circulum CX. Ad hunc apta lineam rectam $CX = \frac{r}{nn}$, & per puncta K, C, & X deſcribe circulum $KCXG$. Junge AX, & junctam produc donec ea iterum ſecet circulum ultimo deſcriptum $KCXG$ in puncto G. Denique inter hunc ultimo deſcriptum circulum & rectam KC utrinque productam inſcribe rectam EY ejuſdem longitudinis cum recta AC, ita ut ea convergat ad punctum G. Et acta recta EC erit una ex radicibus æquationis. Radices autem affirmativæ ſunt quæ cadunt in majori circuli ſegmento KGC, & negativæ quæ in minori KFC ſi habeatur $-r$; & contra ſi habeatur $+r$ affirmativæ in minori ſegmento KFC, negativæ in majori KGC reperientur.

Ad hujus vero conſtructionis demonſtrationem præmittimus Lemmata ſequentia.

LEM. I. *Poſitis quæ in conſtructione ſuperiore, eſt* CE *ad* KA *ut* $CE + CX$ *ad* AY, & CX *ad* KY.

Nam

Nam recta KG ducta, eſt AC ad AK ut CX ad KG, idque ob ſimilia triangula ACX, AKG. Sunt etiam triangula YEC, YKG ſimilia: quippe quæ communem habent angulum ad Y, & angulos ad G & C in eodem circuli KCG ſegmento EGCK, atque adeo æquales. Inde fit CE ad EY ut KG ad KY, id eſt CE ad AC ut KG ad KY eo quod EY & AC juxta Hypotheſin æquantur. Collata autem hacce cum ſuperiore proportionalitate colligitur ex æquo perturbate quod ſit CE ad KA ut CX ad KY, & viciſſim CE ad CX ut KA ad KY. Unde componendo fit CE+CX ad CX ut KA+KY ad KY, id eſt ut AY ad KY, & viciſſim CE+CX ad AY ut CX ad KY hoc eſt ut CE ad KA. Q. E. D.

Lem. II. *Demiſſo ad lineam GY perpendiculo CH, fiet rectangulum 2HEY æquale rectangulo CE×CX.*

Nam demiſſo etiam ad lineam AY perpendiculo GL, triangula KGL, ECH rectos habentia angulos ad L & H, & angulos ad K & E in eodem circuli CGK ſegmento CKEG, adeoque æquales, æquiangula ſunt & proinde ſimilia. Eſt ergo KG ad KL ut EC ad EH. Porro, à puncto A ad lineam KG demiſſo perpendiculo AM, ob æquales AK, AG biſecabitur KG in M, & triangula KAM, KGL ob angulum ad K communem, & angulos ad M & L rectos fient ſimilia: & inde eſt AK ad KM ut KG ad KL. Sed ut eſt AK ad KM ita eſt 2AK ad 2KM ſeu KG, & ita (ob ſimilia triangula AKG, ACX) eſt 2AC ad CX; & (ob æquales AC & EY) ita eſt 2EY ad CX. Ergo eſt 2EY ad CX ut KG ad KL. Sed erat KG ad KL ut EC ad EH, ergo eſt 2EY ad CX ut EC ad EH, atque adeo rectangulum 2HEY (ductis nimirum extremis & mediis in ſe) æquale eſt rectangulo EC×CX. Q. E. D.

Aſſumpſimus hic lineas AK, AG æquales eſſe. Nimirum rectangula CAK, XAG (per *Corol. Prop.* 36. *lib.* III. *Elem.*) æqualia ſunt, atque adeo ut CA eſt ad XA ita AG eſt ad AK. Sed CA, XA æquales ſunt per Hypotheſin; ergo & AG, AK.

Lem. III. *Conſtructis omnibus ut ſupra, tres lineæ BY, CE, KA, ſunt continue proportionales.*

Nam (per *Prop.* 12. *lib.* II. *Elem.*) eſt $CYq = EYq + CEq$

+

$+2EY\times EH$. Et ablato utrinque EYq fit $CYq-EYq=CEq$ $+2EY\times EH$. Sed $2EY\times EH$ (per *Lem.* 2.) æquale eſt rectangulo $CE\times CX$, & addito utrinque CEq fit $CEq+2EY\times EH$ $=CEq+CE\times CX$. Ergo $CYq-EYq$ æquale eſt $CEq+CE$ $\times CX$, id eſt $CY+EY$ in $CY-EY$ æquale eſt $CEq+CE\times CX$. Et reſolutis æqualibus rectangulis in latera proportionalia fit $CE+CX$ ad $CY+EY$ ut $CY-EY$ ad CE. Sunt autem tres lineæ EY, CA, CB æquales, & inde $CY+EY=CY+CA=AY$, & $CY-EY=CY-CB=BY$. Scribantur itaque AY pro $CY+EY$, & BY pro $CY-EY$, & fiet $CE+CX$ ad AY ut BY ad CE. Sed (*per Lem.* 1.) eſt CE ad KA ut $CE+CX$ ad AY, ergo eſt CE ad KA ut BY ad CE, hoc eſt lineæ tres BY, CE, KA, ſunt continue proportionales. Q. E. D.

Tandem ope horum Lemmatum conſtructio ſuperioris Problematis ſic *demonſtratur*.

Per Lemma 1. eſt CE ad KA ut CX ad KY, adeoque $KA\times CX$ $=KY\times CE$, & applicatis his æqualibus extremorum & mediorum rectangulis ad CE fit $\frac{KA\times CX}{CE}=KY$. His lateribus æqualibus adde BK & æqualia erunt $BK+\frac{KA\times CX}{CE}$ & BY. Unde per *Lemma tertium* eſt $BK+\frac{KA\times CX}{CE}$ ad CE ut CE ad KA, & inde, ductis extremis & mediis in ſe provenit CEq æquale $BK\times KA$ $+\frac{KAq\times CX}{CE}$, & omnibus præterea ductis in CE fit CE *cub.* æquale $BK\times KA\times CE+KAq\times CX$. CE erat radix æquationis dicta x, KA erat n, $KB\ \frac{q}{n}$, & $CX\ \frac{r}{nn}$. His pro CE, KA, KB, & CX ſubſtitutis oritur $x^3=qx+r$, ſeu $x^3-qx-r=0$, æquatio conſtruenda; ubi q & r negativa prodeunt ſumptis KA & KB ad eaſdem partes puncti K, & radice affirmativa in majori ſegmento CGK exiſtente. Hic *unus caſus* eſt Conſtructionis demonſtrandæ. Ducatur KB ad partes contrarias, id eſt, mutetur ſignum ejus ſeu ſignum ipſius $\frac{q}{n}$, vel quod perinde eſt, ſignum

ter-

Digitized by Google

termini q, & habebitur conſtructio æquationis $x^3+qx-r=0$: *Qui caſus eſt alter*. In his caſibus CX, & radix affirmativa CE cadunt ad eaſdem partes lineæ AK. Cadant CX & radix negativa ad eaſdem mutato ſigno ipſius CX ſeu $\frac{r}{nn}$ vel (quod perinde eſt) ſigno ipſius r, & habebitur *caſus tertius* $x^3+qx+r=0$, ubi radices omnes ſunt negativæ. Et mutato rurſus ſigno ipſius KB ſeu $\frac{q}{n}$ vel ſolius q, incidetur in *caſum quartum* $x^3-qx+r=0$. Quorum omnium caſuum conſtructiones percurrere licebit, & ſigillatim demonſtrare ad modum caſus primi. Nos uno caſu demonſtrato cæteros leviter attingere ſatis eſſe putavimus. Hi verbis iiſdem mutato ſolum linearum ſitu demonſtrantur.

Conſtruenda jam ſit æquatio cubica $x^3+pxx*+r=0$, *cujus tertius terminus deeſt.*

In figura ſuperiore aſſumpta longitudine quavis n, capias in recta quavis infinita AY, KA, & KB quarum KA valeat $\frac{r}{nn}$, & KB valeat p. Has cape ad eaſdem partes puncti K, ſi modo ſigna terminorum p & r ſint eadem, ſecus ad contrarias. Biſeca BA in C, & centro A intervallo AC deſcribe circulum CX. In eo aptes rectam CX, æqualem longitudini aſſumptæ n. Junge AX & produc junctam ad G ita ut fiat AG æqualis AK, & per puncta K, C, X, G, deſcribe circulum. Denique inter hunc circulum & rectam KC utrinque productam inſcribe rectam EY ejuſdem longitudinis cum recta AC ea lege ut hæc inſcripta recta tranſeat per punctum G ſi modo ipſa producatur: & acta recta KY erit una ex radicibus æquationis. Sunt autem radices affirmativæ quæ cadunt ad partes puncti K verſus punctum A ſi modo habeatur $+r$; ſin habeatur $-r$, affirmativæ ſunt quæ cadunt ad partes contrarias. Et ſi affirmativæ radices jacent ex una parte puncti A, negativæ ſunt quæ jacent ex altera.

Demonſtratur autem hæc conſtructio ope Lemmatum trium noviſſimorum in hunc modum.

Per *Lemma tertium* ſunt BY, CE, KA continue proportionales; & per *Lemma primum* ut eſt CE ad KA ita eſt CX ad KY.

Ergo BY eſt ad CE ut CX ad KY. BY idem eſt quod KY −KB. Ergo KY−KB eſt ad CE ut CX ad KY. Sed ut eſt KY−KB ad CE ita eſt KY−KB in KY ad CE in KY, idque per *Prop.* 1. *lib.* VI. *Elem.* & ob proportionales CE ad KA ut CX ad KY eſt CE in KY æquale KA in CX. Ergo KY −KB in KY eſt ad KA in CX (ut KY−KB ad CE, hoc eſt) ut CX ad KY. Et ductis extremis & mediis in ſe invicem fit KY−KB in KY*q* æquale KA in CX*q*: id eſt KY *cub.* −KB×KY *quad.* æquale KA×CX *quad.* Erat autem in conſtructione, KY radix æquationis dicta x, KB æqualis p, KA æqualis $\frac{r}{nn}$, & CX æqualis n. Scribantur igitur x, p, $\frac{r}{nn}$, & n pro KY, KB, KA, & CX reſpective, & fiet $x^3-pxx=r$, ſeu $x^3-pxx-r=0$.

Reſolvi poteſt conſtructio demonſtranda in haſce quatuor æquationum caſus, $x^3-pxx-r=0$, $x^3-pxx+r=0$, $x^3+pxx-r=0$, & $x^3+pxx+r=0$. Caſum primum jam demonſtratum dedi, cæteri tres iiſdem verbis mutato tantum linearum ſitu demonſtrantur. Nimirum uti ſumendo KA & KB ad eaſdem partes puncti K, & radicem affirmativam KY ad contrarias partes, jam prodiit KY *cub.* −KB×KY*q*=KA×CX*q*, & inde $x^3-pxx-r=0$: ſic ſumendo KB ad contrarias partes puncti K, prodibit ſimili argumentationis progreſſu KY *cub.* +KB×KY*q*=KA×CX*q*, & inde $x^3+pxx-r=0$. Et in hiſce duobus caſibus ſi mutetur ſitus radicis affirmativæ KY ſumendo eam ad alteram partem puncti K, per ſimilem argumentationis ſeriem devenietur ad alteros duos caſus KY *cub.* +KB×KY*q*=−KA×CX*q*, ſeu $x^3+pxx+r=0$, & KY *cub.* −KB×KY*q*=−KA×CX*q*, ſeu $x^3-pxx+r=0$. Qui omnes caſus erant demonſtrandi.

Proponatur jam æquatio cubica $x^3+pxx+qx+r=0$, *nullo* (*niſi forte tertio*) *termino carens.* Ea conſtruetur ad hunc modum.

Tab. IX. Fig. 8. Cape ad arbitrium longitudinem n. Ejus dimidio æqualem duc rectam quamvis GC, & ad punctum G erige perpendiculum GD æquale $\sqrt{\frac{r}{p}}$. Deinde ſi termini p & r habent contraria ſigna, cen-

tro

tro C intervallo C D deſcribe circulum P B E. Sin eadem ſunt eorum ſigna, centro D intervallo G C deſcribe circulum occultum ſecantem rectam G A in H; dein centro C intervallo G H deſcribe circulum P B E. Tum fac $GA = -\frac{q}{n} - \frac{r}{np}$, eamque duc in linea G C ad partes puncti G verſus C ſi modo quantitas $-\frac{q}{n} - \frac{r}{np}$ (ſignis terminorum p, q, r, in æquatione conſtruenda probe obſervatis) affirmativa obvenerit: ſecus age G A ad alteras partes puncti G, & ad punctum A erecto perpendiculo A Y, inter hoc & circulum P B E ſuperius deſcriptum inſcribe lineam E Y æqualem termino r, ea lege ut hæc inſcripta convergat ad punctum G. Quo facto & producta illa E Y ad G, erit linea E G una ex radicibus æquationis conſtruendæ. Quæ quidem radices affirmativæ ſunt ubi punctum E cadit inter puncta G & Y, & negativæ ubi E cadit extra, ſi modo habeatur $+p$; & contra ſi $-p$. Tab. X. Fig. 1.

Demonſtrationi hujus conſtructionis præmittimus *Lemmata* ſequentia.

Lem. I. *Demiſſo ad A G perpendiculo E F & acta recta E C, eſt* $EGq + GCq = ECq + 2CGF$.

Nam per *Prop.* 12. *lib.* II. *Elem.* eſt $EGq = ECq + GCq + 2GCF$. Addatur utrinque GCq & fiet $EGq + GCq = ECq + 2GCq + 2GCF$. Sed $2GCq + 2GCF$ eſt $2GC$ in $GC + CF$ id eſt $2CGF$. Ergo $EGq + GCq = ECq + 2CGF$. Q. E. D.

Lem. II. *In conſtructionis caſu primo ubi circulus P B E tranſit per punctum D, eſt* $EGq - GDq = 2CGF$. Tab. IX. Fig. 8.

Nam per *Lemma primum* eſt $EGq + GCq = ECq + 2CGF$, & ablato utrinque GCq, fit $EGq = ECq - GCq + 2CGF$. Sed $ECq - GCq$ idem eſt quod $CDq - GCq$, hoc eſt idem quod GDq. Ergo $EGq = GDq + 2CGF$, & ſubducto utrobique GDq, fit $EGq - GDq = 2CGF$. Q. E. D.

Lem. III. *In conſtructionis caſu ſecundo, ubi circulus P B E non tranſit per punctum D, eſt* $EGq + GDq = 2CGF$. Tab. X. Fig. 1.

Namque in *Lemmate primo* erat $EGq + GCq = ECq + 2CGF$. Aufer utrinque ECq & fiet $EGq + GCq - ECq = 2CGF$. Sed

 GC

GC=DH & EC=CP=GH: ergo $GCq - ECq = DHq - GHq = GDq$, atque adeo $EGq + GDq = 2CGF$. Q.E.D.

LEM. IV. *Eſt* $2CGF$ *in* $GY = 2CG$ *in* AGE.

Namque ob ſimilia triangula GEF, GYA eſt GF ad GE ut AG ad GY; hoc eſt (per *Prop.* I. *lib.* VI. *Elem.*) ut $2CG \times AG$ ad $2CG \times GY$. Ducantur extrema & media in ſe, & fiet $2CG \times GY \times GF = 2CG \times AG \times GE$. Q. E. D.

Tandem ope horum Lemmatum conſtructio Problematis ſic demonſtratur.

TAB. IX. Fig. 8. In caſu *primo* eſt (per *Lem.* 2.) $EGq - GDq = 2CGF$, & ductis omnibus in GY fit $EGq \times GY - GDq \times GY = 2CGF \times GY$ (hoc eſt per *Lem.* 4.) $= 2CG \times AGE$. Pro GY ſcribe $EG + EY$, & fiet $EG\,cub. + EY \times EGq - GDq \times EG - GDq \times EY = 2CGA \times EG$, ſeu $EG\,cub. + EY \times EGq \begin{array}{l} -\,GDq \\ -\,2CGA \end{array} \times EG - GDq \times EY = 0$.

TAB. X. Fig. 1. In caſu *ſecundo* eſt (per *Lem.* 3.) $EGq + GDq = 2CGF$, & ductis omnibus in GY fit $EGq \times GY + GDq \times GY = 2CGF \times GY$ (hoc eſt per *Lem.* 4.) $= 2CG \times AGE$. Pro GY ſcribe $EG + EY$, & fiet $EG\,cub. + EY \times EGq + GDq \times EG + GDq \times EY = 2CGA \times EG$, ſeu $EG\,cub. + EY \times EGq \begin{array}{l} +\,GDq \\ -\,2CGA \end{array} \times EG + GDq \times EY = 0$.

Jam vero erat EG radix æquationis conſtructæ dicta x; item $GD = \sqrt{\frac{r}{p}}$, $EY = p$, $2CG = n$, & $GA = -\frac{q}{n} - \frac{r}{np}$, id eſt in caſu primo ubi terminorum p & r diverſa ſunt ſigna: at in caſu ſecundo ubi alterutrius p vel r mutatur ſignum fiet $-\frac{q}{n} + \frac{r}{np} = GA$. Scribantur igitur pro EG, GD, EY, 2CG, & GA quantitates x, $\sqrt{\frac{r}{p}}$, p, n, & $-\frac{q}{n} \begin{array}{l} - \\ + \end{array} \frac{r}{np}$, & caſu *primo* fiet $x^3 + px^2 \begin{array}{l} -\frac{r}{p} \\ +q+\frac{r}{p} \end{array} x - r = 0$, id eſt $x^3 + pxx + qx - r = 0$, caſu autem *ſecundo* $x^3 + px^2 \begin{array}{l} +\frac{r}{p} \\ +q-\frac{r}{p} \end{array} x + r = 0$, id eſt $x^3 + pxx + qx + r = 0$. Eſt igi-

igitur in utroque caſu EG vera longitudo radicis x. Q. E. D.

Subdiſtinguitur autem caſus uterque in caſus plures particulares: Nimirum prior in hoſce $x^3+px^2+qx-r=0$, $x^3+pxx-qx-r=0$, $x^3-pxx+qx+r=0$, $x^3-pxx-qx+r=0$, $x^3+px^2-r=0$, & $x^3-pxx+r=0$; poſterior in hoſce $x^3+pxx+qx+r=0$, $x^3+pxx-qx+r=0$, $x^3-pxx+qx-r=0$, $x^3-pxx-qx-r=0$, $x^3+pxx+r=0$, & $x^3-pxx-r=0$. Quorum omnium demonſtrationes verbis iiſdem ac duorum jam demonſtratorum, mutato tantum linearum ſitu, compinguntur.

Hæ ſunt Problematum conſtructiones præcipuæ per inſcriptionem rectæ longitudine datæ inter circulum, & rectam lineam poſitione datam ea lege ut inſcripta ad datum punctum convergat. Inſcribitur autem talis recta ducendo *Conchoidem* veterum, cujus Polus ſit punctum illud ad quod recta inſcribenda debet convergere, Regula ſeu Aſymptotos recta altera poſitione data, & intervallum longitudo rectæ inſcribendæ. Secabit enim hæc Conchoides circulum præfatum in puncto E per quod recta inſcribenda duci debet. Suffecerit vero in rebus practicis rectam illam inter circulum & alteram poſitione datam rectam ratione quacunque mechanica interponere.

In hiſce autem conſtructionibus notandum eſt quod quantias n, ubique indeterminata & ad arbitrium aſſumenda relinquitur, id adeo ut ſingulis problematis conſtructiones commodius aptentur. Hujus rei exempla in inventione duarum medie proportionalium, & anguli triſectione dabimus.

Inveniendæ ſint inter a & b duæ medie proportionales x & y. Quoniam ſunt $a.x.y.b$ continue proportionales erit aa ad xx ut x ad b, adeoque $x^3=aab$, ſeu $x^3-aab=0$. Hic deſunt æquationis termini p & q, & loco termini r habetur $-aab$. Igitur in conſtructionum formula prima, ubi recta EY ad datum punctum K convergens inſeritur inter alias duas poſitione datas rectas EX & YC, & recta CX ponitur æqualis $\frac{r}{nn}$ id eſt æqualis $\frac{-aab}{nn}$, aſſumo n æqualem a, & ſic fit CX æqualis $-b$. Unde talis emergit conſtructio. TAB. X. Fig. 2.

Duco quamvis KA æqualem a, eamque biſeco in C, centroque

K

K intervallo KC deſcribo circulum CX ad quem apto rectam CX æqualem b & inter rectas AX, CX infinite productas pono EY æqualem CA, & convergentem ad punctum K. Sic erunt KA, XY, KE, CX, continue proportionales, id eſt XY & KE duæ medie proportionales inter a & b. Conſtructio nota eſt.

Tab. IX. Fig. 7. In altera autem conſtructionum formula ubi recta EY ad datum punctum G convergens ponitur inter circulum GECX & rectam AK, eſtque $CX = \frac{r}{nn}$ id eſt (in hoc Problemate) $= \frac{-aab}{nn}$, pono ut prius $n = a$, & ſic fit $CX = b$, cæteraque peraguntur ut ſequitur.

Tab. X. Fig. 3. Duco rectam quamvis KA æqualem a, eamque biſeco in C & centro A intervallo AK deſcribo circulum KG ad quem apto rectam KG æqualem $2b$ conſtituendo triangulum æquicrurum AKG. Dein per puncta C, K, G circulum deſcribo & inter hujus perimetrum & rectam productam AK inſcribo rectam EY æqualem KC, & convergentem ad punctum G. Quo facto continue proportionales erunt AK, EC, KY, $\frac{1}{2}$KG, id eſt EC & KY duæ medie proportionales erunt inter datas a & b.

Tab. X. Fig. 4. *Secandus jam ſit angulus in partes tres æquales. Sitque angulus ſecandus ACB, partes ejus inveniendæ ACD, DCE, ECB.*

Centro C intervallo CA deſcribatur circulus ADEB ſecans rectas CA, CD, CE, CB in A, D, E, B. Jungantur AD, DE, EB ut & AB ſecans rectas CD, CE in F & H, & ipſi CE parallela agatur DG occurrens AB in G. Ob ſimilia triangula CAD, ADF, DFG, continue proportionales ſunt CA, AD, DF, FG. Ergo ſi dicatur $AC = a$, & $AD = x$, fiet $DF = \frac{xx}{a}$, & $FG = \frac{x^3}{aa}$. Eſt autem $AB = BH + HG + FA - GF = 3AD - GF = 3x - \frac{x^3}{aa}$. Dic $AB = b$, & fiet $b = 3x - \frac{x^3}{aa}$, ſeu $x^3 - 3aax + aab = 0$. Hic deeſt æquationis terminus ſecundus p, & loco q & r habentur $-3aa$ & aab. Ergo in conſtructionum formula prima ubi erat $p = 0$, $KA = n$, $KB = \frac{q}{n}$, & $CX = \frac{r}{nn}$, id eſt in pro-

problemate jam conſtruendo $KB = -\frac{3aa}{n}$, & $CX = \frac{aab}{nn}$, ut hæ quantitates evadant quam ſimpliciſſimæ pono $n = a$, & ſic fit $KB = -3a$, & $CX = b$. Unde talis emergit Problematis *conſtructio.*

Ago quamvis $KA = a$, & ad contrarias partes $KB = 3a$. Biſeco BA in C, centroque K intervallo KC deſcribo circulum, cui inſcribo rectam $CX = b$. Et acta recta AX, inter ipſam infinite productam & rectam CX pono rectam EY æqualem AC, & convergentem ad punctum K. Sic fit $XY = x$. Quinetiam ob æquales circulos ADEB, CXA, & æquales ſubtenſas AB, CX, nec non æquales ſubtenſarum partes BH, XY, æquales erunt anguli ACB, CKX, ut & anguli BCH, XKY, atque adeo anguli CKX tertia pars erit angulus XKY. Dati igitur cujuſvis anguli CKX pars tertia XKY invenietur ponendo inter chordas CX, AX infinite productas rectam EY æqualem diametro AC, & convergentem ad circuli centrum K. TAB. X. Fig. 5.

Hinc ſi à circuli centro K ad ſubtenſam CX demittas perpendiculum KH, erit angulus HKY tertia pars anguli HKX, adeo ut ſi detur quilibet angulus HKX inveniri poſſit ejus pars tertia HKY demittendo à quolibet lateris utriuſvis KX puncto X ad latus alterum KH perpendiculum XH, & lateri KH ducendo parallelam XE, dein rectam YE duplam ipſius KX, & convergentem ad punctum K ponendo inter rectas XH & XE. *Vel ſic.* Detur angulus quilibet AXK. Ad latus alterutrum AX erigatur perpendiculum XH, & à lateris alterius XK puncto quovis K agatur recta KE cujus pars YE interjacens lateri AX producto, & ejus perpendiculo XH ſit dupla lateris XK, & erit angulus KEA tertia pars anguli dati AXK. Tum rurſus erecto perpendiculo EZ, & acta KF cujus pars ZF inter EF & EZ ſit dupla ipſius KE, fiet angulus KFA tertia pars anguli KEA, & ſic pergitur per continuam anguli triſectionem in infinitum. Exſtat autem hæc triſectio apud *Pappum*, *lib.* 4. *Prop.* 32. TAB. X. Fig. 6.

Quod ſi angulum per alteram conſtructionum formulam ubi recta inter aliam rectam & circulum ponenda eſt, trifariam dividere malueris:

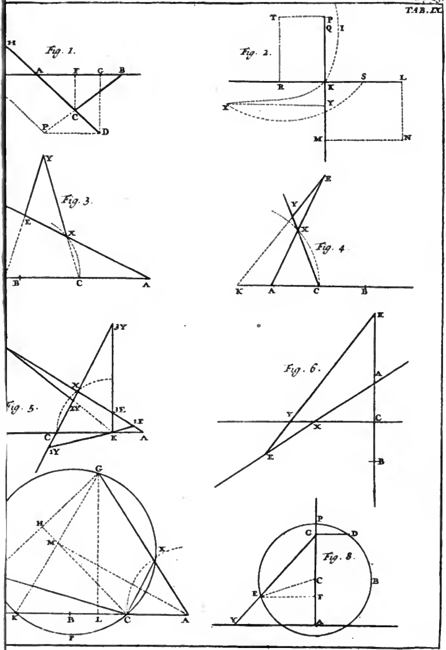
Hic

TAB. IX. Fig. 7. Hic etiam erunt $KB = \frac{q}{n}$, & $CX = \frac{r}{nn}$, id eſt in problemate de quo nunc agimus $KB = \frac{-3aa}{n}$, & $CX = \frac{aab}{nn}$, adeoque ponendo $n = a$ fiet $KB = -3a$, & $CX = b$. Et inde talis emerget *conſtructio.*

TAB. X. Fig. 7. A puncto quovis K ducantur ad eaſdem partes rectæ duæ $KA = a$, & $KB = 3a$. Biſeca AB in C, centroque A intervallo AC deſcribe circulum. In eo pone rectam $CX = b$. Junge AX, & junctam produc donec ea iterum ſecet circulum jam deſcriptum in G. Tum inter hunc circulum & rectam KC infinite productam pone rectam EY æqualem rectæ AC, & convergentem ad punctum G, & acta recta EC erit longitudo quæſita x, qua tertia pars anguli dati ſubtenditur.

Talis conſtructio conſequitur formulam ſuperius allatam: quæ tamen ſic evadet concinnior. Ob æquales circulos ADEB & KXG, & æquales ſubtenſas CX & AB, æquales ſunt anguli CAX ſive KAG & ACB, adeoque CE ſubtenſa eſt tertiæ partis anguli KAG. Quare dato quovis angulo KAG, ut ejus inveniatur pars tertia CAE, pone inter circulum KGC, & anguli latus KA infinite productum rectam EY æqualem circuli ſemidiametro AG, & convergentem ad punctum G. Sic docuit *Archimedes* angulum trifariam ſecare. (*Lemma Archim* 8.) Eædem conſtructiones facilius explicari poſſent quam hic factum eſt; ſed in his volui oſtendere quomodo ex generalibus Problematum conſtructionibus ſuperius expoſitis conſtructiones ſimpliciſſimas particularium Problematum derivare liceat.

TAB. X. Fig. 8. Præter conſtructiones hic expoſitas adjungere liceret quamplurimas. *Ut ſi inter a & b inveniendæ eſſent duæ mediæ proportionales.* Age quamvis $AK = b$, & huic perpendiculare $AB = a$. Biſeca AK in I, & in eadem AK, ſubtenſæ BI æqualem pone AH; ut & in linea AB producta ſubtenſæ BH æqualem AC. Tum in linea AK ad alteras partes puncti A cape AD cujuſvis longitudinis, & huic æqualem DE, centriſque D & F, intervallis DB, EC deſcribe circulos duos BF, CG, & inter eos pone rectam FG æqualem rectæ AI, & convergentem ad punctum A, & erit AF prima



Digitized by Google

ma duarum medie proportionalium quas invenire oportuit.

Docuerunt Veteres inventionem duarum medie proportionalium per *Ciſſoidem*; ſed lineæ hujus deſcriptionem commodam manualem nemo, quod ſcio, appoſuit. Sit AG diameter & F centrum circuli ad quem *Ciſſois* pertinet. Tab. X. Fig. 9. Ad punctum F erigatur normalis FD, eaque producatur in infinitum. Et producatur FG ad P, ut FP æqualis ſit circuli Diametro. Moveatur norma rectangula PED ea lege ut crus ejus EP perpetuo tranſeat per punctum P, & crus alterum ED circuli Diametro AG ſeu FP æquale, termino ſuo D tangat ſemper lineam FD, & cruris hujus medium punctum C deſcribet *Ciſſoidem* deſideratam GCK ut ſupra expoſui. pag. 130. Quare ſi inter duas quaſvis a & b inveniendæ ſint duæ mediæ proportionales: Cape AM $= a$, erige perpendiculum MN $= b$. Junge AN; & lege præfata moveatur norma PED, uſque dum punctum ejus C incidat in rectam AN. Tum demiſſo ad AP perpendiculo CB, cape t ad BH, & u ad BG, ut eſt MN ad BC, & ob continue proportionales AB, BH, BG, BC erunt etiam continue proportionales a, t, v, b.

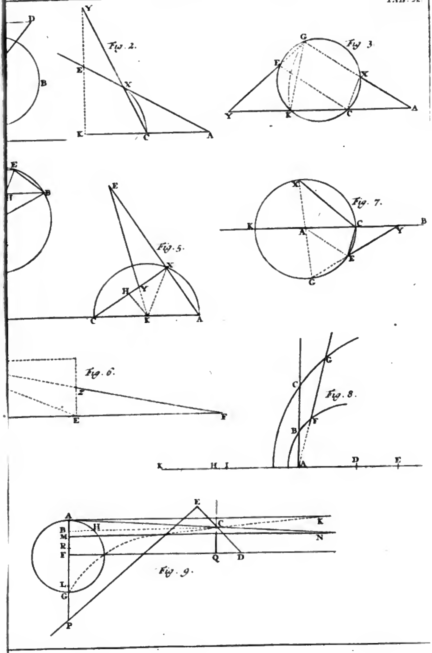
Simili normæ applicatione conſtrui poſſunt etiam alia Problemata ſolida Verbi gratia proponatur æquatio cubica $x^3 \pm pxx + qx - r = 0$: ubi q ſemper affirmativum ſit, r negativum, & p ſigni utriuſvis. Fac $AG = \frac{r}{q}$, eamque biſeca in F, & cape FR & $GL = \frac{1}{2}p$, idque verſus A ſi habeatur $+p$ aliter verſus P. Erige inſuper normalem FD, inque ea cape $FQ = \sqrt{q}$ huic etiam erige normalem QC. In normæ autem crure ED, cape ED & EC ipſis AG & AR æquales reſpective, & applicetur deinceps norma ad Schema ſic ut punctum ejus D tangat rectam FD, & punctum C rectam QC, tum ſi compleatur parallelogrammum BQ; erit LB æquationis radix quæſita x.

Hactenus conſtructionem ſolidorum Problematum per operationes quarum praxis manualis maxime ſimplex eſt & expedita exponere viſum fuit. Sic Veteres poſtquam confectionem horum problematum per compoſitionem locorum ſolidorum aſſecuti fuerant, ſentientes ejuſmodi conſtructiones ob difficilem Conicarum ſectionum deſcrip-

tionem inutiles eſſe, quærebant conſtructiones faciliores per Conchoidem, Ciſſoidem, extenſionem filorum & figurarum adaptiones quaſcunque mechanicas: prælata mechanica utilitate inutili ſpeculationi Geometricæ, ut ex *Pappo* diſcimus, Sic magnus ille *Archimedes* triſectionem anguli per coni ſectiones à ſuperioribus Geometris expoſitam neglexit, & in Lemmatis ſuis angulum modo à nobis ſuperius expoſito trifariam ſecare docuit. Si veteres problemata per figuras ea tempeſtate in Geometriam non receptas conſtruere maluerint, quanto magis præferendæ nunc ſunt illæ figuræ, in Geometriam æque ac ipſæ coni ſectiones à pleriſque receptæ.

Verum tamen novo huic Geometrarum generi haud aſſentior, qui figuras haſce omnes in Geometriam recipiunt. Eorum regula admittendi lineas omnes ad conſtructionem Problematum eo ordine quo æquationes quibus lineæ illæ definiuntur, numero dimenſionum aſcendunt, arbitraria eſt, & in Geometria fundamentum non habet. Imo falſa eſt, propterea quod circulus hac lege cum Coni ſectionibus conjungendus eſſet quem tamen Geometræ omnes cum linea recta conjungunt. Vacillante autem hac regula tollitur fundamentum admittendi certo ordine lineas omnes Analyticas in Geometriam. In Geometriam planam meo quidem judicio lineæ nullæ præter rectam & circulum admitti debent, niſi forte linearum diſtinctio aliqua prius excogitetur qua linea circularis conjungatur cum recta, & à reliquis omnibus ſegregetur. Quinimo ne tum quidem augenda eſt Geometria plana numero linearum, Nam figuræ omnes ſunt planæ quæ admittuntur in Geometriam planam, id eſt quas Geometræ poſtulent in plano deſcribere, Et problema omne planum eſt quod per figuras planas conſtrui poteſt. Sic igitur admiſſis in Geometriam planam conicis ſectionibus, aliiſque magis compoſitis figuris, problemata omnia ſolida & plus quam ſolida quæ per has figuras conſtrui poſſunt evadent plana. Sunt autem problemata omnia plana ejuſdem ordinis. Linea recta Analytice ſimplicior eſt quam circulus; hoc non obſtante problemata ejuſdem ſunt ordinis quæ per rectas ſolas, & quæ per circulos conſtruuntur. Solis poſtulatis reducitur circulus ad eundem ordinem cum recta. Et multo magis Ellipſis quæ minus differt à circulo quam circulus à recta, poſtulando conſimiliter de-

TAB. X.



Digitized by Google

Digitized by Google

deſcriptionem ejus in plano, reduceretur ad eundem ordinem cum circulo. Siquis ſpeculando Ellipſin incideret in problema aliquod ſolidum, & ipſum beneficio ejuſdem Ellipſeos & circuli conſtrueret: hoc problema jam pro plano habendum eſſet, eo, quod Ellipſis jam ante in plano deſcripta haberi ſupponitur, & conſtructio omnis quæ ſupereſt abſolvitur per circuli ſolius deſcriptionem. Eadem de cauſa problemata quævis plana per datam Ellipſin conſtruere licitum eſt. Verbi gratia ſi datæ Ellipſeos ADFG requireretur centrum O, ducerem parallelas duas AB, CD Ellipſi occurrentes in A, B, C, D, aliaſque duas EF, GH Ellipſi occurrentes in E, F, G, H. Has biſecarem in I, K, L, M, & junctas IK, LM producerem uſque ad concurſum ſuum in O. Legitima eſt hæc conſtructio plani problematis per Ellipſin. Nil refert quod Ellipſis Analytice definiatur per æquationem duarum dimenſionum. Nil quod Ellipſis Geometrice generetur ſectione figuræ ſolidæ. Hypotheſis ſola, quod Ellipſis jam deſcripta habetur in plano, problemata omnia ſolida per ipſam conſtructa reducit ad ordinem planorum, efficitque ut plana omnia per ipſam legitime conſtruantur. Et eadem eſt ratio Poſtulati. Quod vi poſtulatorum fieri poteſt, ut jam factum, & datum aſſumere conceſſum eſt. Poſtuletur igitur Ellipſin in plano deſcribere, & ad ordinem planorum problematum reducentur ea omnia quæ per Ellipſin conſtrui poſſunt, planaque omnia per Ellipſin licebit conſtruere. TAB. XI. Fig. 1.

Neceſſe eſt igitur aut Problemata plana & ſolida inter ſe confundi, aut lineas omnes rejici è Geometria plana præter rectam & circulum, & ſiqua forſan alia detur aliquando in ſtatu conſtruendi alicujus Problematis. Verum genera problematum confundi nemo certe permiſerit. Rejiciantur igitur è Geometria plana ſectiones Conicæ, aliæque figuræ omnes præter rectam & circulum, & quas contigerit in ſtatu problematum dari. Alienæ ſunt igitur à Geometria deſcriptiones illæ omnes conicarum ſectionum in plano quibus hodierni Geometræ tantopere indulgent. Nec tamen ideo Coni ſectiones è Geometria rejiciendæ erunt. Hæ in plano non deſcribuntur Geometrice, generantur vero in ſolidi Geometrici ſuperficie plana. Conus conſtituitur Geometrice, & plano Geometrico ſecatur. Tale Coni ſegmentum figura Geometrica eſt, eundemque

 habet

habet locum in Geometria ſolida ac ſegmentum circuli in plana, & hac ratione baſis ejus, quam Coni ſectionem vocant, figura Geometrica eſt. Locum igitur habet Coni ſectio in Geometria quatenus ea ſuperficies eſt ſolidi Geometrici. Alia autem nulla ratione Geometrica quam ſolidi ſectione generatur, & ideo non niſi in Geometriam ſolidam antiquitus admiſſa fuit. Talis autem Conicarum ſectionum generatio difficilis eſt, & in rebus practicis, quibus Geometria potiſſimum inſervire debet, prorſus inutilis. Ideo veteres ſe ad varias figurarum in plano deſcriptiones mechanicas receperunt, & nos ad eorum exemplar conſtructiones præcedentes concinnavimus. Sunto conſtructiones illæ Mechanicæ: ſic & conſtructiones per Coni ſectiones in plano (ut jam moris eſt) deſcriptas Mechanicæ ſunt. Sunto conſtructiones per datas Coni ſectiones Geometricæ: ſic & conſtructiones per alias quaſcunque figuras datas Geometricæ ſunt, & ejuſdem ordinis cum conſtructionibus planorum Problematum. Nulla ratione præferendæ ſunt in Geometria Sectiones conicæ figuris aliis, niſi quatenus illæ à ſectione Coni, praxi ad ſolutionem problematum prorſus inutili, derivantur. Verum tamen ne conſtructiones per Conicas ſectiones omnino præteream, viſum fuit aliqua de his ſubjungere, in quibus etiam praxi manuali non incommodæ conſulatur.

Conicarum ſectionum ſimpliciſſima eſt Ellipſis. Hæc notior eſt, & circulo magis affinis, & praxi manuali facilius deſcribitur in plano. Parabolam præferunt plerique ob ſimplicitatem æquationis per quam ea exprimitur. Verum hac ratione Parabola ipſo etiam circulo præferenda eſſet, contra quam fit. Falſa eſt igitur argumentatio à ſimplicitate æquationum. Æquationum ſpeculationi nimium indulgent hodierni Geometræ. Harum ſimplicitas eſt conſiderationis Analyticæ. Nos in compoſitione verſamur, & compoſitioni leges dandæ non ſunt ex Analyſi. Manuducit Analyſis ad Compoſitionem: ſed Compoſitio non prius vere confit quam liberatur ab omni Analyſi. Inſit compoſitioni vel minimum Analyſeos, & compoſitionem veram nondum aſſecutus es. Compoſitio in ſe perfecta eſt & à mixtura ſpeculationum Analyticarum abhorret. Pendet Figurarum ſimplicitas à ſimplicitate geneſeos & Idearum, & æquatio non eſt ſed de-

deſcriptio (ſive Geometrica ſive Mechanica) qua figura generatur & redditur conceptu facilis. Ellipſi igitur primum locum tribuentes, docebimus jam quomodo æquationes per ipſam conſtruere liceat.

Proponatur æquatio quævis cubica $x^3 = pxx + qx + r$, *ubi* p, q *&* r *datas terminorum æquationis coefficientes cum ſignis ſuis* + & — *ſignificant, & alteruter terminorum* p *&* q, *vel etiam uterque deeſſe poteſt.* Sic enim æquationum omnium cubicarum conſtructiones una illa operatione quæ ſequitur exhibebimus.

A puncto B in recta quavis data cape duas quaſcunque rectas BC, BE ad eaſdem partes; ut & inter ipſas mediam proportionalem BD. Et BC dicta n, cape etiam in eadem recta $BA = \frac{q}{n}$, idque verſus punctum C ſi habeatur $-q$, aliter ad partes contrarias. Ad punctum A erige perpendiculum AI, inque eo cape AF æqualem p, FG æqualem AF, FI æqualem $\frac{r}{nn}$, & FH in ratione ad FI ut eſt BC ad BE. FH vero & FI capiendæ ſunt ad partes puncti F verſus G ſi termini p & r habent eadem ſigna, aliter ad partes verſus A. Compleantur parallelogramma IACK & HAEL, centroque K, & intervallo KG deſcribatur circulus. Tum in linea HL capiatur ad utramvis partem puncti H longitudo HR, quæ ſit ad HL ut BD ad BE: Agatur GR ſecans EL in S, & moveatur linea GRS puncto ejus R ſuper linea HL, & puncto S ſuper linea EL incedente, donec tertium ejus punctum G deſcribendo Ellipſin, occurrat circulo, quemadmodum videre eſt in poſitione $\gamma\rho\sigma$. Nam dimidium perpendiculi γX ab occurſus illius puncto γ in rectam AE demiſſi erit radix æquationis. Poteſt autem Regulæ GRS vel $\gamma\rho\sigma$ terminus G vel γ, circulo in tot punctis occurrere quot ſunt poſſibiles radices. Et è radicibus hæ ſunt affirmativæ quæ cadunt ad eas partes rectæ AE ad quas recta FI ducitur à puncto F, & illæ negativæ quæ cadunt ad contrarias partes lineæ AE, ſi modo habeatur $+r$: & contra ſi habeatur $-r$. TAB. XI. Fig. 2.

Demonſtratur autem hæc conſtructio ſubſidio *Lemmatum* ſequentium.

LEM. I. *Poſitis quæ in ſuperiore conſtructione, eſt* $2CAX - AXq = \gamma Xq - 2AI \times \gamma X + 2AG \times FI$.

Namque ex natura circuli eſt $K\gamma q - CXq$, æquale quadrato ex $\gamma X - AI$. Sed eſt $K\gamma q$ æquale $GIq + ACq$, & CXq æquale quadrato ex $AX - AC$ hoc eſt æquale $AXq - 2CAX + ACq$, atque adeo horum differentia $GIq + 2CAX - AXq$, æquatur quadrato ex $\gamma X - AI$, id eſt ipſi $\gamma Xq - 2AI \times \gamma X + AIq$. Auferatur utrinque GIq, & manebunt æqualia $2CAX - AXq$, & $\gamma Xq - 2AI \times \gamma X + AIq - GIq$. Verum AIq (per *Prop.* 4. *lib.* II. *Elem.*) æquale eſt $AGq + 2AGI + GIq$, atque adeo $AIq - GIq$ æquale eſt $AGq + 2AGI$, hoc eſt æquale $2AG$ in $\frac{1}{2}AG + GI$, ſeu æquale $2AG \times FI$, & proinde $2CAX - AXq$, æquale eſt $\gamma Xq - 2AI \times \gamma X + 2AG \times FI$. Q. E. D.

Lem. II. *Poſitis quæ in ſuperiore conſtructione, eſt* $2EAX - AXq$ *æquale* $\frac{FI}{FH}X\gamma q - \frac{2FI}{FH}AH \times X\gamma + 2AG \times FI$.

Notum eſt enim quod punctum γ motu regulæ $\gamma\rho\sigma$ ſuperius aſſignato deſcribit Ellipſin cujus centrum eſt L, & axes duo cum rectis LE & LH coincidunt, quorum qui in LE æquatur $2\gamma\rho$ ſive $2GR$, & alter in LH æquatur $2\gamma\sigma$ ſive $2GS$. Et horum ratio ad invicem ea eſt quæ lineæ HR ad lineam HL, ſive lineæ BD ad lineam BE. Unde latus tranſverſum eſt ad latus rectum principale ut BE ad BC ſive ut FI ad FH. Quare cum γT ordinatim applicetur ad HL, erit ex natura Ellipſeos $GSq - LTq$ æquale $\frac{FI}{FH}T\gamma q$. Eſt autem LT æquale $AE - AX$, & $T\gamma$ æquale $X\gamma - AH$. Scribantur horum quadrata pro LTq & $T\gamma q$, & fiet $GSq - AEq + 2EAX - AXq = \frac{FI}{FH}$ in $X\gamma q - 2AH \times X\gamma + AHq$. Eſt autem $GSq - AEq$ æquale quadrato ex $GH + LS$, propterea quod GS hypotenuſa eſt trianguli rectanguli cujus latera ſunt ipſis AE & $GH + LS$ æqualia. Eſt & (ob ſimilia triangula RGH, RSL) LS ad GH ut LR ad HR, & componendo $GH + LS$ ad GH ut HL ad HR, & duplicando rationes, quadratum ex $GH + LS$, eſt ad GHq ut HLq ad HRq, hoc eſt (per conſtructionem) ut BEq ad BDq, id eſt ut BE ad BC, ſeu FI ad FH, adeoque quadratum ex $GH + LS$ æquale eſt

FI

Digitized by Google

$\frac{FI}{FH}GHq$. Eſt itaque $GSq - AEq$ æquale $\frac{FI}{FH}GHq$, atque adeo $\frac{FI}{FH}GHq + 2EAX - AXq = \frac{FI}{FH}$ in $X\gamma q - 2AH \times X\gamma + AHq$. Auferatur utrinque $\frac{FI}{FH}GHq$, & reſtabit $2EAX - AXq = \frac{FI}{FH}$ in $X\gamma q - 2AH \times X\gamma + AHq - GHq$. Eſt autem $AH = AG + GH$, adeoque $AHq = AGq + 2AGH + GHq$ & ſubducto utrinque GHq reſtat $AHq - GHq = AGq + 2AGH$, hoc eſt $= 2AG$ in $\frac{1}{2}AG + GH$, ſeu $= 2AG \times FH$, atque adeo eſt $2EAX - AXq = \frac{FI}{FH}$ in $X\gamma q - 2AH \times X\gamma + 2AG \times FH$, i. e. $= \frac{FI}{FH}X\gamma q - \frac{2FI}{FH}AH \times X\gamma + 2AG \times FI$. Q. E. D.

Lem. III. *Iiſdem poſitis eſt AX ad $X\gamma - AG$ ut $X\gamma$ ad $2BC$.* Nam ſi de æqualibus in *Lemmate ſecundo* ſubducantur æqualia in *Lemmate primo*, reſtabunt æqualia $2CE \times AX$ & $\frac{HI}{FH}X\gamma q - \frac{2FI}{FH}AH \times X\gamma + 2AI \times X\gamma$. Ducatur pars utraque in FH, & fiet $2FH \times CE \times AX$ æquale $HI \times X\gamma q - 2FI \times AH \times X\gamma + 2AI \times FH \times X\gamma$. Eſt autem $AI = AH + HI$, adeoque $2FI \times AH - 2FH \times AI = 2FI \times AH - 2FHA - 2FHI$. Sed $2FI \times AH - 2FHA = 2AHI$, & $2AHI - 2FHI = 2HI \times AF$. Ergo $2FI \times AH - 2FH \times AI = 2HI \times AF$, adeoque $2FH \times CE \times AX = HI \times X\gamma q - 2HI \times AF \times X\gamma$. Et inde HI ad FH ut $2CE \times AX$ ad $X\gamma q - 2AF \times X\gamma$. Sed per conſtructionem HI eſt ad FH ut CE ad BC, atque adeo ut $2CE \times AX$ ad $2BC \times AX$, & proinde $2BC \times AX$ & $X\gamma q - 2AF \times X\gamma$ (per *Prop.* 9. *lib.* V. *Elem.*) erunt æqualia. Æqualium vero rectangulorum proportionalia ſunt latera, AX ad $X\gamma - 2AF$, id eſt ad $X\gamma - AG$ ut $X\gamma$ ad $2BC$. Q. E. D.

Lem. IV. *Iiſdem poſitis, eſt $2FI$ ad $AX - 2AB$ ut $X\gamma$ ad $2BC$.*

Nam de æqualibus in Lemmate tertio, nimirum $2BC \times AX =$

$= X\gamma q - 2AF \times X\gamma$, ſubducantur æqualia in *Lemmate primo*, & reſtabunt æqualia $-2AB \times AX + AXq = 2FI \times X\gamma - 2AG \times FI$, hoc eſt AX in $AX - 2AB = 2FI$ in $X\gamma - AG$. Æqualium vero rectangulorum proportionalia ſunt latera $2FI$ ad $AX - 2AB$ ut AX ad $X\gamma - AG$, hoc eſt (per *Lemma tertium*) ut $X\gamma$ ad $2BC$. Q. E. D.

Præſtratis his Lemmatibus, Conſtructio Problematis ſic tandem demonſtratur.

Per *Lemma quartum* eſt $X\gamma$ ad $2BC$ ut $2FI$ ad $AX - 2AB$, hoc eſt (per *Prop.* 1. *lib.* VI. *Elem.*) ut $2BC \times 2FI$ ad $2BC \times \overline{AX - 2AB}$, ſeu ad $2BC \times AX - 2BC \times 2AB$. Sed per *Lemma tertium* eſt AX ad $X\gamma - 2AF$ ut $X\gamma$ ad $2BC$, ſeu $2BC \times AX = X\gamma q - 2AF \times X\gamma$, adeoque $X\gamma$ eſt ad $2BC$ ut $2BC \times 2FI$ ad $X\gamma q - 2AF \times X\gamma - 2BC \times 2AB$. Et ductis extremis & mediis in ſe, fit $X\gamma$ *cub.* $- 2AF \times X\gamma q - 4BC \times AB \times X\gamma = 8BCq \times FI$. Addantur utrinque $2AF \times X\gamma q + 4BC \times AB \times X\gamma$, & fiet $X\gamma$ *cub.* $= 2AF \times X\gamma q + 4BC \times AB \times X\gamma + 8BCq \times FI$. Erat autem in conſtructione demonſtranda, $\frac{1}{2}X\gamma$ radix æquationis dicta x, nec non $AF = p$, $BC = n$, $AB = \frac{q}{n}$, & $FI = \frac{r}{nn}$, adeoque $BC \times AB = q$. Et $BCq \times FI = r$. Quibus ſubſtitutis fiet $x^3 = px^2 + qx + r$. Q. E. D.

Corol. Hinc ſi AF & AB ponantur nulla, per *Lemma* tertium & quartum fiet $2FI$ ad AX ut AX ad $X\gamma$ & $X\gamma$ ad $2BC$. Unde conſtat inventio duarum medie proportionalium inter datas quaſlibet FI & BC.

Scholium. Hactenus æquationis cubicæ conſtructionem per Ellipſin ſolummodo expoſui: ſed regula ſua natura generalior eſt, ſeſe ad omnes coni ſectiones indifferenter extendens. Nam ſi loco Ellipſeos velis Hyperbolam adhiberi, cape lineas BC, BE ad contrarias partes puncti B, dein puncta A, F, G, I, H, K, L & R determinentur ut ante, excepto tantum quod FH debet ſumi ad partes ipſius F contra I, & quod HR non in linea HL, ſed in linea AI ad utramque partem puncti H capi debet, & vice rectæ GRS duæ aliæ rectæ à puncto L ad puncta duo R & R hinc inde duci pro aſymptotis Hyperbolæ. Cum iſtis itaque aſymptotis LR, LR de-

deſcribe Hyperbolam per punctum G, ut & circulum centro K intervallo KG: & dimidia perpendiculorum ab eorum interſectionibus ad rectam AE demiſſorum erunt radices æquationis propoſitæ. Quæ omnia, ſignis + & — probe mutatis, demonſtrantur ut prius.

Quod ſi Parabolam velis adhiberi, abibit punctum E in infinitum, atque adeo nullibi capiendum erit, & punctum H cum puncto F coincidet eritque Parabola circa axem HL cum latere recto principali BC per puncta G & A deſcribenda, ſito vertice ad partes puncti F ad quas punctum B ſitum eſt reſpectu puncti C.

Si ſunt conſtructiones per Parabolam, ſi ſimplicitatem analyticam ſpectes, ſimpliciſſimæ omnium, eæ per Hyperbolam proximum locum obtinent, & ultimum locum tenent quæ per Ellipſin abſolvuntur. Quod ſi praxeos manualis in deſcribendis figuris ſpectetur ſimplicitas, mutandus eſt ordo.

In hiſce autem conſtructionibus obſervandum venit quod proportione lateris recti principalis ad latus tranſverſum determinatur ſpecies Ellipſeos & Hyperbolæ, & proportio illa eadem eſt quæ linearum BC & BE, atque adeo aſſumi poteſt: Parabolæ vero ſpecies eſt unica quam artifex ponendo BE infinite longam aſſequitur. Sic igitur penes artificem eſt æquationem quamcunque cubicam per conicam ſectionem imperatæ ſpeciei conſtruere. A figuris autem ſpecie datis ad figuras magnitudine datas devenietur augendo vel diminuendo in ratione data lineas omnes quibus figuræ ſpecie dabantur, atque ita æquationes omnes cubicas per datam quamvis Conicam ſectionem conſtruere licebit. Id quod ſic plenius explico.

Proponatur æquationem quamcunque cubicam $x^3 = p\,x\,x.\ q\,x.\ r$, ope datæ cujuſcunque ſectionis conicæ conſtruere.

A puncto quovis B in recta quavis infinita BCE, cape duas quaſcunque longitudines BC, BE ad eaſdem partes ſi data Coni ſectio ſit Ellipſis, ad contrarias ſi ea ſit Hyperbola. Sit autem BC ad BE ut datæ ſectionis latus rectum principale ad latus tranſverſum, & BC nominata *n*. Cape $BA = \frac{q}{n}$, idque verſus C ſi habeatur $-q$, aliter ad partes contrarias. Ad punctum A erige perpendiculum AI, in que eo cape AF æqualem *p*, & FG æqualem AF; TAB. X. Fig. 3.

Digitized by Google

item F I æqualem $\frac{r}{nn}$. Capiatur vero F I verſus G ſi termini p & r habent eadem ſigna, aliter verſus A. Dein fac ut ſit F H ad F I ut B C ad B E, & hanc F H cape à puncto F verſus I ſi ſectio ſit Ellipſis, aut ad partes contrarias ſi ea ſit Hyperbola. Porro compleantur parallelogramma I A C K & H A E L, & hæ omnes jam deſcriptæ lineæ transferantur ad datam ſectionem Conicam, aut quod perinde eſt, his ſuperponatur curva, ita ut axis ejus ſive tranſverſa diameter principalis conveniat cum recta L H & centrum cum puncto I. His ita conſtitutis agatur recta K L ut & recta G L ſecans conicam ſectionem in g. In L K cape L k quæ ſit ad L K ut L g ad L G, centroque k & intervallo kg deſcribe circulum. A punctis ubi hic ſecuerit curvam impoſitam demitte perpendicula ad lineam L H, cujuſmodi ſit γ T. Denique verſus γ, cape T Y quæ ſit ad Tγ ut L G ad Lg, & hæc T Y producta ſecet rectam A B in X, eritque recta $\frac{1}{2}$X Y una ex radicibus æquationis. Sunt autem radices affirmativæ quæ jacent ad partes rectæ A B ad quas recta F I jacet à puncto F, & negativæ quæ jacent ad contrarias partes ſi modo habeatur $+r$, & contra ſi $-r$ obvenerit.

Hoc modo conſtruuntur æquationes cubicæ per Ellipſes & Hyperbolas datas: Quod ſi detur Parabola, capienda eſt B C æqualis lateri recto ipſius. Dein punctis A, F, G, I & K inventis ut ante, centro K intervallo K G deſcribendus eſt circulus, & Parabola ita applicanda ad Schema jam deſcriptum (aut Schema ad Parabolam) ut ipſa tranſeat per puncta A & G, & axis ejus ipſi A C parallelus per punctum F, cadente vertice ad partes puncti illius F ad quas punctum B cadit à puncto C. His ita conſtitutis, ſi perpendicula ab ejus occurſibus cum circulo demittantur ad lineam B C, eorum dimidia erunt radices æquationis conſtruendæ.

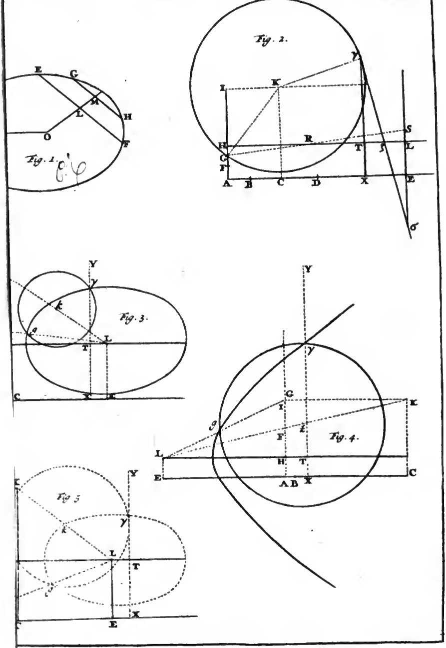
Et notes quod ubi ſecundus æquationis terminus deeſt, & latus rectum Parabolæ ponitur numerus binarius, hæc conſtructio evadet eadem cum illa quam Carteſius attulit in Geometria ſua, præterquam quod lineamenta hic ſunt illorum duplicia.

Hæc eſt conſtructionum regula generalis. Verum ubi problemata particularia proponuntur, conſulendum eſt conſtructionum for-

l. 260

Pag 243.

TAB. XI.



Digitized by Google

formulis ſimpliciſſimis. Libera enim manet quantitas n, cujus aſſumptione conſtructio plerumque ſimplicior reddi poteſt. Ejus rei exemplum unum ſubjungo.

Detur Ellipſis, & inter datas lineas a & b inveniendæ ſint duæ mediæ proportionales. Sit earum prima x, & $a.\ x.\ \frac{xx}{a}.\ b$ erunt continue proportionales, adeoque $ab = \frac{x^3}{a}$, ſeu $x^3 = aab$ æquatio eſt quam conſtruere oportet. Hic deſunt termini p, & q, & terminus r eſt aab, adeoque BA & AF nullæ ſunt, & FI eſt $\frac{aab}{nn}$. Ut terminus noviſſimus evadat ſimplicior aſſumatur $n = a$, & fiet $FI = b$ Deinde conſtructio ita ſe habebit.

A puncto quovis A in recta quavis infinita AE cape $AC = a$, & ad eaſdem partes puncti A cape AC ad AE ut eſt Ellipſeos latus rectum principale ad latus tranſverſum. Tum in perpendiculo AI cape $AI = b$, & AH ad AI ut eſt AC ad AE. Compleantur parallelogramma IACK, HAEL. Jungantur LA, LK. Huic ſchemati imponatur Ellipſis data. Secet ea rectam AL in puncto g, Fiat Lk ad LK ut Lg ad LA. Centro k intervallo kg deſcribatur circulus ſecans Ellipſin in γ. Ad AE demittatur perpendiculum γX ſecans HL in T, & producatur id ad Y ut ſit TY ad Tγ ſicut LA ad Lg. Sic fiet XY prima duarum medie proportionalium x. Q. E. I. TAB. XI. Fig. 5.

DE

SOLUTIONE

ET

CONSTRUCTIONE ÆQUATIONUM

SCRIPTA VARIA.

Ex TRANSACTIONIBUS PHILOSOPHICIS

EXCERPTA.

Digitized by Google

Digitized by Google

METHODUS NOVA

Accurata & facilis inveniendi Radices Æquationum quarumcunque generaliter, ſine prævia Reductione. Per Edm. Halley, *Geom. Prof. Savil.*

Artis Analyticæ præcipuus quidem uſus eſt Problemata Mathematica ad æquationes perducere, eaſque terminis quantum fieri poſſit ſimpliciſſimis exhibere. Ars autem iſta manca quodammodo, nec ſatis Analytica merito videretur, niſi Methodi quædam ſubminiſtrarentur, quarum ope Radices, ſive Lineæ ſive Numeri ſint, ex jam inventis æquationibus elicere liceret, eoque nomine Problemata ſoluta dare.

Veteribus ſane vix quicquam ſupra Quadraticarum æquationum naturam innotuit; quæcunque vero ſcripſere de Solidorum Problematum Effectione Geometrica ope Parabolæ, Ciſſoïdis, aliuſve Curvæ, particularia tantum ſunt, ac caſibus particularibus deſtinata; de Numericâ vero Extractione ubique altum ſilentium; ita ut quicquid in hoc genere jam calculo præſtamus, modernorum inventis fere totum debetur.

Ac primus quidem ingens ille Algebræ hodiernæ repertor ac reſtaurator *Franciſcus Vieta*, annis abhinc circiter centum, Methodum generalem aperuit pro educendis radicibus ex æquatione qualibet; eamque ſub titulo *De Numeroſâ poteſtatum ad Exegeſin Reſolutione* publico donavit, *ubique* ut ait *obſervando retrogradam Compoſitionis viam*. Hujuſque Veſtigiis inſiſtentes *Harriottus*, *Oughtredus* aliique, tam noſtrates quam extranei, quæcunque de hac re ſcriptis mandarunt, à *Vietâ* deſumpta debent agnoſcere. Qualia vero in hoc negotio præſtiterit ſagaciſſima ingenii *Newtoniani* vis, ex contractiore Specimine à Clariſſimo *Walliſio*, Cap. xciv. Algebræ ſuæ, edi-

edito, potius conjecturâ aſſequi quam pro certo comperiri licet. Ac dum obſtinata Authoris modeſtia amicorum precibus devicta cedat, inventaque hæc ſua pulcherrima in lucem promere dignetur, expectare cogimur.

Nuper vero eximius ille juvenis *D. Joſephus Raphſon*, *R. S. S.* *Analyſin Æquationum Univerſalem* Anno 1690. evulgavit, ſuæque Methodi præſtantiam pluribus exemplis abunde illuſtravit; quo Genii Mathematici maxima quæque pollicentis nobile indicium prodidit.

Hujus exemplo ac ductu (ut par eſt credere) *D. de Lagney*, haud vulgaris apud *Pariſienſes* Mathematum Profeſſor, idem argumentum aggreſſus eſt; qui cum totus fere ſit in eliciendis Poteſtatum purarum radicibus, præſertim Cubica, pauca tantum eaque perplexa nec ſatis demonſtrata de affectarum radicum extractione ſubjungit. Regulas autem binas compendioſas admodum pro approximatione radicis Cubicæ profert, alteram rationalem, alteram irrationalem; nempe Cubi $aaa+b$ latus eſſe inter $a+\frac{ab}{3aaa+b}$ ac $\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{b}{3a}}+\frac{1}{2}a$. Radicem autem poteſtatis Quintæ a^5+b ſic exprimit $=\frac{1}{2}a+\sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}a^4+\frac{b}{5a}}-\frac{1}{4}aa}$ (non $\frac{1}{2}aa$ ut perperam legitur in libro Gallico impreſſo.) Has Regulas, cum nondum librum videram, ab amico communicatas habui, quarum vires experimento edoctus, compendiumque admiratus, volui etiam Demonſtrationem inveſtigare: Ea vero inventa ad Univerſalem Æquationum omnium reſolutionem eandem methodum accommodari poſſe ſtatim cognovi; Eoque magis eas excolere ſtatui, quia uno intuitu rem totam Synoptice explicari poſſe videbam, quodque hoc pacto ſingulis calculi reſtaurati vicibus ſaltem triplicarentur notæ ſive Ciphræ in radice jam inventæ, quæ quidem omnibus aliorum omnium computationibus non niſi pari cum datis numero augentur.

Demonſtrantur autem Regulæ prædictæ ex Geneſi Cubi & Poteſtatis quintæ. Poſito enim Latere Cubi cujuſque $a+e$, Cubus inde conflatus fit $aaa+3aae+3aee+eee$, adeoque ſi ſupponatur

aaa

aaa Numerus Cubus proxime minor dato quovis non Cubo, eee minor erit Unitate, ac reſiduum ſive b æquabitur reliquis Cubi membris $3aae+3aee+eee$: rejectoque eee ob parvitatem, $b=3aae+3aee$. Cumque aae multo majus ſit quam aee, $\frac{b}{3aa}$ non multum excedet ipſam e, poſitoque $e=\frac{b}{3aa}$, $\frac{b}{3aa+3ae}$, cui proxime æquatur quantitas e, invenietur $=\frac{b}{3aa+\frac{3ab}{3aa}}$ ſive $\frac{b}{3aa+\frac{b}{a}}$: hoc eſt $\frac{ab}{3aaa+b}=e$, adeoque latus Cubi $aaa+b$ habebitur $a+\frac{ab}{3aaa+b}$ quæ eſt ipſa formula rationis D[ni] *de Lagny*. Quod ſi aaa fuerit Numerus Cubus proxime major dato, Latus Cubi $aaa-b$ pari ratiocinio invenietur $a-\frac{ab}{3aaa-b}$; atque hæc Radicis Cubicæ approximatio ſatis expedita ac facilis parum admodum fallit in defectu, cum ſcilicet e reſiduum Radicis hoc pacto inventum paulo minus juſto ſit. Irrationalis vero formula etiam ex eodem fonte derivatur, *viz.* $b=3aae+3aee$, ſive $\frac{b}{3a}=ae+ee$; adeoque $\sqrt{\tfrac{1}{4}aa+\frac{b}{3a}}=\tfrac{1}{2}a+e$, atque $\sqrt{\tfrac{1}{4}aa+\frac{b}{3a}}+\tfrac{1}{2}a=a+e$, ſive Radici quæſitæ. Latus vero Cubi $aaa-b$ eodem modo habebitur $\tfrac{1}{2}a+\sqrt{\tfrac{1}{4}aa-\frac{b}{3a}}$. Atque hæc quidem formula aliquanto propius ad ſcopum collimat, in exceſſu peccans ſicut altera in defectu, ac ad praxin magis commoda videtur, cum reſtitutio Calculi nihil aliud ſit quam continua additio vel ſubductio ipſius $\frac{eee}{3a}$, ſecundum ac quantitas e innoteſcat; ita ut potius ſcribendum ſit $\sqrt{\tfrac{1}{4}aa+\frac{b-eee}{3a}}+\tfrac{1}{2}a$ in priori caſu, ac in poſteriori $\tfrac{1}{2}a+\sqrt{\tfrac{1}{4}aa+\frac{eee-b}{3a}}$. Utraque au-

tem formula Ciphræ jam cognitæ in Radice extrahendâ ad minimum triplicantur, quod quidem Arithmeticæ ſtudioſis omnibus gratum fore confido, atque ipſe Inventori abunde gratulor.

Ut autem harum regularum utilitas melius ſentiatur, exemplum unum vel alterum adjungere placuit. Quæratur Latus Cubi dupli, ſive $aaa+b=2$. Hic $a=1$ atque $\frac{b}{3a}=\frac{1}{3}$, adeoque $\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{7}{12}}$ ſive $1,26$ invenietur Latus prope verum. Cubus autem ex $1,26$ eſt $2,000376$, adeoque $0,63+\sqrt{,3969-\frac{,000376}{3,78}}$ ſive $0,63+\sqrt{,396800529100529}=1,259921049895-$; quod quidem tredecim figuris Latus Cubi dupli exhibet, nullo fere negotio, *viz.* unâ Diviſione & Lateris Quadrati extractione, ubi vulgari operandi modo quantum deſudaſſet Arithmeticus norunt experti. Hunc etiam calculum quouſque velis continuare licet, augendo quadratum additione $\frac{eee}{3a}$. Quæ quidem correctio hoc in caſu non niſi unitatis in Radicis figurâ decima-quartâ augmentum affert.

Exemp. II. Quæratur Latus Cubi æqualis menſuræ *Anglicæ Gallon* dictæ, uncias ſolidas 231 continentis. Cubus proxime minor eſt 216 cujus Latus $6=a$, ac reſiduum $15=b$, adeoque pro prima approximatione provenit $3+\sqrt{9+\frac{5}{6}}=$ Radici. Cumque $\sqrt{9,8333\ldots}$ ſit $3,1358\ldots$ patet $6,1358=a+e$. Supponatur jam $6,1358=a$, & habebimus Cubum ejus $231,000853894712$, ac juxta regulam $3,0679+\sqrt{9,41201041-\frac{,000853894712}{18,4074}}$ æquatur accuratiſſime Lateri Cubi dati, id quod intra horæ ſpatium calculo obtinui 6.135792439661958897, in octodecima figura juſtum, at deficiens in decima nona. Hæc vero formula merito præferenda eſt rationali, ob ingentem diviſorem, non ſine magno labore tractandum; cum Lateris quadrati extractio multo facilius procedat, ut experientia multiplex me docuit.

Regula autem pro Radice Surſolidi Puri ſive poteſtatis quintæ paulo altioris indaginis eſt atque etiam adhuc multo perfectius rem præ-

Digitized by Google

præſtat: datas enim in Radice Ciphras ad minimum quintuplicat, neque etiam multi nec operoſi eſt Calculi. Author autem nullibi inveniendi methodum ejuſve demonſtrationem concedit, etiamſi maxime deſiderari videatur: præſertim cum in Libro impreſſo non recte ſe habeat; id quod imperitos facile illudere poſſit. Poteſtas autem Quinta Lateris $a+e$ conficitur ex his membris $a^5+5a^4e+10a^3ee+10a^2eee+5ae^4+e^5=a^5+b$, unde $b=5a^4e+10a^3ee+10a^2e^3+5ae^4$, rejecto e^5 ob parvitatem ſuam: quo circa $\frac{b}{5a}=a^3e+2a^2e^2+2ae^3+e^4$, atque utrinque addendo $\frac{1}{4}a^4$ habebimus $\sqrt{\frac{1}{4}aaaa+\frac{b}{5a}}=\sqrt{\frac{1}{4}a^4+a^3e+2a^2e^2+2ae^3+e^4}=\frac{1}{2}aa+ae+ee$. Dein utrinque ſubducendo $\frac{1}{4}aa$, $\frac{1}{2}a+e$ æquabitur $\sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}a^4+\frac{b}{5a}}-\frac{1}{4}aa}$ cui ſi addatur $\frac{1}{2}a$, erit $a+e=\frac{1}{2}a+\sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}a^4+\frac{b}{5a}}-\frac{1}{4}aa}=$ radici poteſtatis a^5+b. Quod ſi fuiſſet a^5-b, (aſſumpta a juſto majore,) regula ſic ſe haberet, $\frac{1}{2}a+\sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}a^4-\frac{b}{5a}}-\frac{1}{4}aa}$.

Atque hæc regula mirum in modum approximat, ut vix reſtitutione opus ſit; at dum hæc mecum penſitavi, incidi in formularum methodum quandam generalem pro quavis poteſtate ſatis concinnam, quamque celare nequeo; cum etiam in ſuperioribus poteſtatibus datas radicis figuras triplicare valeant.

Hæ autem formulæ ita ſe habent tam rationales quam irrationales.

$$\sqrt{aa+b}=\sqrt{aa+b} \text{ vel } a+\frac{ab}{2aa+\frac{1}{2}b}$$

$$\sqrt[3]{a^3+b}=\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{b}{3a}} \text{ vel } a+\frac{ab}{3aaa+b}$$

$$\sqrt[4]{a^4+b}=\frac{2}{3}a+\sqrt{\frac{1}{9}aa+\frac{b}{6aa}} \text{ vel } a+\frac{ab}{4a^4+\frac{3}{2}b}$$

$$\sqrt[5]{a^5+b}=\frac{3}{4}a+\sqrt{\frac{1}{16}aa+\frac{b}{10a^3}} \text{ vel } a+\frac{ab}{5a^5+2b}$$

$$\sqrt[6]{a^6+b} = \tfrac{1}{5}a + \sqrt{\tfrac{1}{25}aa + \frac{b}{15a^4}} \text{ vel } a + \frac{ab}{6a^6 + \frac{5}{2}b}$$

$$\sqrt[7]{a^7+b} = \tfrac{1}{6}a + \sqrt{\tfrac{1}{36}aa + \frac{b}{21a^5}} \text{ vel } a + \frac{ab}{7a^7 + 3b}$$

Et ſic de cæteris etiam adhuc ſuperioribus. Quod ſi aſſumeretur a radice quæſita major; (quod cum fructu ſit quoties Poteſtas reſolvenda multo propior ſit poteſtati Numeri integri proxime majoris quam proxime minoris,) mutatis mutandis eædem radicum expreſſiones proveniunt.

$$\sqrt{aa-b} = \sqrt{aa-b} \text{ vel } a - \frac{ab}{2aa - \frac{1}{2}b}$$

$$\sqrt[3]{aaa-b} = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}aa - \frac{b}{3a}} \text{ vel } a - \frac{ab}{3aaa - b}$$

$$\sqrt[4]{a^4-b} = \tfrac{1}{3}a + \sqrt{\tfrac{1}{9}aa - \frac{b}{6aa}} \text{ vel } a - \frac{ab}{4a^4 - \frac{3}{2}b}$$

$$\sqrt[5]{a^5-b} = \tfrac{1}{4}a + \sqrt{\tfrac{1}{16}aa - \frac{b}{10a^3}} \text{ vel } a - \frac{ab}{5a^5 - 2b}$$

$$\sqrt[6]{a^6-b} = \tfrac{1}{5}a + \sqrt{\tfrac{1}{25}aa - \frac{b}{15a^4}} \text{ vel } a - \frac{ab}{6a^6 - \frac{5}{2}b}$$

$$\sqrt[7]{a^7-b} = \tfrac{1}{6}a + \sqrt{\tfrac{1}{36}aa - \frac{b}{21a^5}} \text{ vel } a - \frac{ab}{7a^7 - 3b}.$$

Atque inter hos duos terminos ſemper conſiſtit vera Radix, aliquanto proprior irrationali quam rationali; e vero juxta formulam irrationalem inventa, ſemper peccat in exceſſu, ſicut in defectu a rationali formula reſultans Quotus; adeoque ſi fuerit $+b$, Irrationalis majorem juſto exhibet radicem, rationalis minorem. E contrario vero ſi fuerit $-b$. Atque hæc de eliciendis radicibus è Poteſtatibus puris dicta ſunto, quæ quidem, ad uſus ordinarios ſufficientes multo facilius habentur ope Logarithmorum: quoties vero ultra Tabularum Logarithmicarum vires accuratiſſime definienda eſt radix, ad hujuſmodi methodos neceſſario recurrendum eſt. Præterea cum ex harum formularum inventione ac contemplatione, Univerſalis Regula pro æquationibus affectis (quam non ſine fructu Geometriæ ac Alge-

Algebræ ſtudioſis omnibus uſurpandam confido) mihi ipſi oblata ſit, volui ipſius inventi primordia qua poſſim claritate aperire.

Æquationum quidem affectarum Quadrato-quadratum non excedentium Conſtructionem Generalem concinnam admodum ac facilem, *Num* 18·. harum *Tranſact*. jam tum inventam publici juris feci: ex quo ingens cupido animum inceſſit, idem Numeris efficiendi. Atque brevi poſt *D*^*ns*^ *Raphſon* magna ex parte voto ſatisfeciſſe viſus eſt, uſque dum *D*^*ns*^ *de Lagny*. etiam adhuc compendioſius rem peragi poſſe hoc ſuo libello mihi ſuggeſſit. Methodus autem noſtra hæc eſt.

Supponatur Radix cujuſvis æquationis z compoſita ex partibus $a+$ vel $-e$, quarum a ex hypotheſi aſſumatur ipſi z quantum fieri poſſit propinqua, (quod tamen commodum eſt, non neceſſarium) & ex quantitate $a+$ vel $-e$ formentur Poteſtates omnes ipſius z in Æquatione inventæ, iiſque affigantur Numeri Coefficientes reſpective: deinde Poteſtas Reſolvenda ſubducatur è ſumma partium datarum in prima columna, ubi e non reperitur, quam Homogeneum Comparationis vocant, ſitque differentia $\pm b$. Dein habeatur ſumma omnium coefficientium ipſius lateris e in ſecunda Columna, quæ ſit s; denique in tertia addantur omnes coefficientes quadrati ee, quarum ſummam vocemus t: Ac radix quæſita z, formula rationali habebitur $= a +$ vel $- \frac{sb}{ss + vel - tb}$: Irrationali vero fiet $z = a \mp \frac{\frac{1}{2}s \pm \sqrt{\frac{1}{4}ss + bt}}{t}$, id quod exemplis illuſtrare fortaſſe operæ pretium erit. Inſtrumenti vero loco adſit Tabella, Poteſtatum omnium ipſius $a+$ vel $-e$ Geneſin exhibens, quæ ſi opus fuerit continuari facile poſſit. A ſeptima vero incipiam, cum pauca Problemata euſque aſſurgere deprehendantur. Hanc Tabellam jure optimo *Speculum Analyticum Generale* appellare licet. Poteſtates autem prædictæ ex continua multiplicatione per $a+e=z$ ortæ, ſic proveniunt, cum ſuis coefficientibus adjunctis.

Tabella Poteſtatum.

$$\begin{array}{llllllll}
 & & s & t & u & w & x & y \\
lz^7 = & la^7 & +7la^6e & +21la^5ee & +35la^4e^3 & +35la^3e^4 & +21la^2e^5 & +7lae^6 & +le^7 \\
kz^6 = & ka^6 & +6ka^5e & +15ka^4ee & +20ka^3e^3 & +15ka^2e^4 & +6kae^5 & +ke^6 \\
bz^5 = & ba^5 & +5ba^4e & +10ba^3ee & +10ba^2e^3 & +5bae^4 & +be^5 \\
gz^4 = & ga^4 & +4ga^3e & +6ga^2ee & +4gae^3 & +ge^4 \\
fz^3 = & fa^3 & +3fa^2e & +3faee & +fe^3 \\
dz^2 = & da^2 & +2dae & +dee \\
cz = & ca & +ce
\end{array}$$

Quod ſi fuerit $a-e=z$, ex iiſdem membris conficitur Tabella, negatis ſolummodo imparibus Poteſtatibus ipſius e, ut e, e^3, e^5, e^7: & affirmatis paribus e^2, e^4, e^6. Sitque Summa Coefficientium lateris $e=s$; Summa Coefficientium Quadrati $ee=t$; Cubi $=u$; Biquadrati $=w$; Surſolidi $e^5=x$; Summa vero coefficientium Cubocubi $=y$; *&c.*

Cum autem ſupponatur e exigua tantum pars radicis inquirendæ, omnes poteſtates ipſius e multo minores evadunt ſimilibus ipſius a Poteſtatibus, adeoque pro prima Hypotheſi rejiciantur ſuperiores, (ut in poteſtatibus puris oſtenſum eſt) ac formata æquatione nova, ſubſtituendo $a \pm e = z$ habebimus ut diximus $\pm b = \pm se \pm tee$. Cujus rei cape exempla ſequentia, quo melius intelligatur.

Exemp. I. Proponatur æquatio $z^4 - 3zz + 75z = 10000$. Pro prima Hypotheſi ponatur $a=10$, ac conſequenter prodibit æquatio,

$$\begin{array}{lllllll}
z^4 = & +a^4 & 4a^3e & +6a^2ee & 4ae^3 & +e^4 \\
-dz^2 = & -da^2 & dae & -dee \\
+cz = & +ca & ce \\
= & +10000 & 4000e & +600ee & 40e^3 & +e^4 \\
 & -300 & 60e & -3ee \\
 & +750 & 75e \\
 & -10000 \\
\hline
 & +450 & -4015e & +597ee & -40e^3 & +e^4 & =0 \\
 & & s & t & u
\end{array}$$

Signis

Signis + ac − (reſpectu e ac e^3) in dubio relictis, uſque dum ſciatur an e ſit negativa vel affirmativa; Quod quidem aliquam parit difficultatem, cum in æquationibus plures radices admittentibus, ſæpe augeantur Homogenea Comparationis, ut appellant, à minuta quantitate a, ac è contra ea aucta minuantur. Determinatur autem ſignum ipſius e ex ſigno quantitatis b; ſublata enim Reſolvenda ex Homogeneo ab a formato, ſignum ipſius se, ac proinde partium in ejus compoſitione prævalentium, ſemper contrarium erit ſigno differentiæ b. Unde patebit an fuerit $-e$ vel $+e$, ſive an a major vel minor radice vera aſſumpta ſit. Ipſa autem e ſemper æquatur $\frac{\frac{1}{2}s-\sqrt{\frac{1}{4}ss-bt}}{t}$, quoties b ac t eodem ſigno notantur; quoties vero diverſo ſigno connectuntur, eadem e fit $\frac{\sqrt{\frac{1}{4}ss+bt}-\frac{1}{2}s}{t}$. Poſtquam vero compertum ſit fore $-e$, in affirmatis æquationis membris negentur e, e^3, e^5, &c. in negatis affirmentur; ſcribantur ſcilicet ſigno contrario; ſi vero fuerit $+e$, affirmentur in affirmatis, negentur in negatis. Habemus autem in hoc noſtro exemplo 10450 loco Reſolvendæ 10000, ſive $b=+450$, unde conſtat a majorem juſto aſſumptam, ac proinde haberi $-e$: Hinc æquatio fit $10450-4015e+597ee-40e^3+e^4=10000$. Hoc eſt $450-4015e+597ee=0$. Adeoque $450=4015e-597ee$ ſive $b=se-tee$ cujus Radix e fit $\frac{\frac{1}{2}s-\sqrt{\frac{1}{4}ss-bt}}{s}$. Vel ſi mavis $\frac{s}{2t}-\sqrt{\frac{ss}{4tt}-\frac{b}{t}}$, id eſt, in præſenti caſu, $\frac{e=2007\frac{1}{2}-\sqrt{3761406\frac{1}{4}}}{597}$, unde provenit Radix quæſita prope verum, 9,886. Hoc vero pro ſecunda Hypotheſi ſubſtituto, emergit $a+e=z$ accuratiſſime 9,8862603936495…., in ultima figura vix binario juſtum ſuperans; nempe cum $\frac{\sqrt{\frac{1}{4}ss+bt}-\frac{1}{2}s}{t}=e$. Atque hoc etiam, ſi opus fuerit, multo ulterius verificari poſſet, ſubducendo $\frac{\frac{1}{2}ue^3+\frac{1}{4}e^4}{\sqrt{\frac{1}{4}ss+tb}}$ ſi fuerit $+e$, vel addendo $\frac{\frac{1}{2}ue^3-\frac{1}{4}e^4}{\sqrt{\frac{1}{4}ss-tb}}$ radici prius inventæ, ſi ſit $-e$. Cujus compendium eo pluris æſtimandum quod

quod quandoque, ex ſola prima ſuppoſitione, ſemper vero ex ſecunda, iiſdem conſervatis coefficientibus quouſque velis calculum continuare poſſis. Cæterum æquatio prædicta etiam negativam habet radicem, *viz.* $x = 10, 26\ldots\ldots$ quam cuilibet accuratius expiſcari licet.

Exempl. II. Sit $z^3 - 17zz + 54z = 350$ ac ponatur $a = 10$. Ex præſcripto Regulæ,

$$\begin{array}{llllll} zzz & = aaa & + 3aae & + 3aee & + eee \\ -dzz & = daa & - 2dae & - dee & \\ +cz & = ca & + ce & & \\ & & b & s & t \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} \text{Id eſt} & +1000 & +300e & +30ee & +eee \\ & -1700 & -340e & -17ee & \\ & +540 & +54e & & \\ & -350 & & & \end{array}$$

Sive $-510 + 14e + 13ee + eee = 0$.

Cum autem habeatur -510, conſtat a minorem juſto aſſumi, ac proinde e affirmativam eſſe, ac ex $510 = 14e + 13ee$ fit $\frac{\sqrt{bt + \frac{1}{4}ss} - \frac{1}{2}s}{t} = e = \frac{\sqrt{6679} - 7}{13}$, unde z fit $15,7\ldots$ quæ nimia quidem eſt ob late ſumptam a; ideo ſupponatur ſecundo $a = 15$, ac pari ratiocinio habebimus $e = \frac{\frac{1}{2}s - \sqrt{\frac{1}{4}ss - tb}}{t} = \frac{109\frac{1}{2} - \sqrt{11710\frac{1}{4}}}{28}$ ac proinde $z = 14,954068$. Quod ſi calculum adhuc tertio reſtaurare velis, uſque in vigeſimam quintam figuram vero conformem invenies radicem; Paucioribus vero contentus, ſcribendo $tb \pm teee$ loco tb, vel ſubtrahendo aut addendo radici prius inventæ $\frac{\frac{1}{2}eee}{\sqrt{\frac{1}{4}ss \mp tb}}$ ad ſcopum ſtatim pervenies. Æquatio vero propoſita nulla alia radice explicari poteſt, quia Poteſtas Reſolvenda 350 major eſt Cubo ex $\frac{17}{3}$ vel $\frac{1}{3}d$.

Exempl. III. Sit Æquatio illa quam in Reſolutione difficillimi Problematis Arithmetici adhibet Clariſſimus *Walliſius*, Cap. LXII. Alge-

Algebræ ſuæ, quo radicem *Vietæ* Methodo accuratiſſime quidem aſſecutus eſt: Eandemque exemplum Methodi ſuæ affert laudatus *D. Raphſon pag.* 25, 26. nempe $z^4 - 80z^3 + 1998z^2 - 14937z + 5000 = 0$. Hæc autem æquatio ejus formulæ eſt, ut plures habeat radices Affirmativas, ac quod difficultatem ejus augeat, prægrandes ſunt Coefficientes reſpectu Reſolvendæ datæ: Quo melius autem tractetur, dividatur, ac juxta notas punctationum regulas ponatur $- z^4 + 8z^3 - 20z^2 + 15z = 0,5$ (ubi z eſt $\frac{1}{10}z$ in æquatione propoſita) ac pro prima Hypotheſi habeamus $a = 1$. Proinde $+ 2 - 5e - 2ee + 4e^3 - e^4 - 0,5 = 0$.

Hoc eſt $1\frac{1}{2} = 5e + 2ee$; hinc $\frac{\sqrt{\frac{1}{4}ss + bt} - \frac{1}{2}s}{t} = e$ fit $\frac{\sqrt{37} - 5}{4}$

adeoque $z = 1,27$: Unde conſtat 12,7 radicem eſſe æquationis propoſitæ vero vicinam. Secundo loco ſupponatur $z = 12,7$ ac juxta præſcriptum Tabellæ Poteſtatum oritur

$$\begin{array}{llll} \quad b & \quad s & \quad t & \quad u \\ - 26014,4541 & - 8193,532e & - 697,74ee & - 50,8e^3 - e^4 \\ + 163870,640 & + 38709,60\,e & + 3048\,ee & + 80\,e^3 \\ - 322257,42 & - 50749,2\,e & - 1998\,ee & \\ + 189699,9 & + 14937\,e & & \\ - 5000 & & & \\ \hline + 298,6559 & - 5296,132e & + 82,26ee & + 29,2e^3 - e^4 = 0. \end{array}$$

Adeoque $- 298,6559 = - 5296,132e + 82,26ee$, cujus radix e juxta regulam $= \frac{\frac{1}{2}s - \sqrt{\frac{1}{4}ss - bt}}{t}$ fit $\frac{2648,066 - \sqrt{6987686,106022}}{82,26}$ $= ,05644080331\ldots = e$ minori vero: Ut autem corrigatur, $\frac{\frac{1}{2}ue^3 - \frac{1}{2}e^4}{\sqrt{\frac{1}{4}ss - bt}}$ ſive $\frac{,0026201\ldots}{2643,423\ldots}$ fit $,0000099117$, ac proinde e correcta $= 05644179448$; Quod ſi adhuc plures radicis figuras deſideras, formetur ex e correcta $tue^3 - te^4 = 0,43105602423\ldots$, ac $\frac{\frac{1}{2}s - \sqrt{\frac{1}{4}ss - bt - tue^3 + te^4}}{t}$ ſive $\frac{2648,066 - \sqrt{6987685,67496597577\ldots}}{82,26}$ $= 05644179448074402 = e$, unde $a + e = z$ radix accuratiſſima

Kk fit

fit 12, 75644179448074402.... qualem invenit Cl. *Walliſius* in loco citato. Ubi obſervandum redintegrationem calculi ſemper triplicare notas veras in aſſumpta a, quas prima correctio ſive $\frac{\frac{4}{3}ue^3 - \frac{1}{5}e^4}{\sqrt{\frac{3}{4}ss - bt}}$ quintuplices reddit, quæque etiam commode per Logarithmos efficitur. Altera autem correctio poſt primam, etiam duplum Ciphrarum numerum adjungit, ut omnino aſſumptas ſeptuplicet; prima tamen plerumque uſibus Arithmetices abunde ſufficit. Quæ vero dicta ſunt de numero ciphrarum in radice recte aſſumptarum, ita intelligi velim, ut cum a non niſi decima parte diſtet à vera radice, prima figura recte aſſumatur; ſi intra centeſimam partem, duæ primæ: Si intra milleſimam tres priores rite ſe habeant; quæ deinde juxta noſtram regulam tractatæ ſtatim novem evadunt.

Reſtat jam ut nonnulla adjiciam de noſtra formula rationali, *viz.* $e = \frac{sb}{ss \pm tb}$, quæ quidem ſatis expedita videbitur, nec multum cedit priori, cum etiam datas ciphras triplicare valeat. Formata autem æquatione ex $a \pm e = z$, ut prius, ſtatim patebit an a aſſumpta ſit major vel minor vero, cum ſcilicet se ſigno ſemper notari debeat contrario ſigno differentiæ Reſolvendæ ac Homogenei ſui ex a producti. Deinde poſito quod $\pm b \mp se +$ vel $- tee = 0$; diviſor fit $ss - tb$ quoties b ac t iiſdem ſignis notantur; idem vero fit $ss + bt$, ſi ſigna iſta diverſa ſint. Praxi autem magis accommodata videtur, ſi ſcriberetur Theorema, $e = \frac{b}{s \pm \frac{tb}{s}}$ nempe cum una multiplicatione ac duabus diviſionibus res peragatur, quæ tres multiplicationes ac unam diviſionem alias requireret Hujus etiam Methodi exemplum capiamus à prædictæ Æquationis radice 12, 7...: ubi

$$\begin{array}{ccccc} 298,6559 & - 5296,132e & + 82,26ee & + 29,2e^3 & - e^4 = 0 \\ +b & -s & +t & +u & \end{array}$$

adeoque $\frac{b}{s - \frac{tb}{s}} = e$, hoc eſt, fiat ut s ad t ita b ad $\frac{tb}{s} = 5296,132)\ 298,$

6559 in 82,26 (4,63875... quocirca diviſor fit $s - \frac{tb}{s} = 5291,$ $49325....)$ 298,6559 (0, 056441 ..... $= e$, *viz.* quinque figuris veris adjectis radici aſſumptæ. Corrigi autem nequit hæc formula ſicut præſens irrationalis; adeoque ſi plures deſiderentur radicis figuræ, præſtat aſſumpta nova Hypotheſi calculum de integro repetere: ac novus Quotus triplicando figuras in radice cognitas ſupputatori etiam maxime ſcrupuloſo abunde ſatisfaciet.

FINIS.

ÆQUATIONUM CUBICARUM

Et Biquadraticarum, tum Geometrica & Mechanica, Reſolutio Univerſalis,

a J. COLSON.

§. 1. Æquationis Cubicæ univerſalis $\left\{ \begin{array}{r} x^3 = 3px^2 + 3qx + 2r, \\ -3p^2 + p^3 \\ 3pq \end{array} \right.$

Radices Tres ſunt,

$$x = p + \sqrt[3]{r + \sqrt{r^2 - q^3}} + \sqrt[3]{r - \sqrt{r^2 - q^3}}$$

$$x = p - \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{r + \sqrt{r^2 - q^3}} - \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{r - \sqrt{r^2 - q^3}}$$

$$x = p - \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{r + \sqrt{r^2 - q^3}} - \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{r - \sqrt{r^2 - q^3}}$$

Vel ut Calculus Arithmeticus facilior ac paratior evadat, ſi poſueris Binomii irrationalis $r + \sqrt{r^2 - q^3}$ Radicem cubicam eſſe $m + \sqrt{n}$, erunt ejuſdem æquationis Radices tres $x = p + 2m$ & $x = p - m \pm \sqrt{-3n}$.

Igitur data Æquatione quàvis Cubica, inter ejus hujuſque Æquationis Univerſalis terminos ſingulos inſtituenda eſt Comparatio, quô pacto facillimè invenientur ipſæ p, q, r; & hiſce cognitis, innoteſcent Æquationis datæ Radices omnes. Hujus verò ſolutionis Exempla ſint ſequentia in Numeris.

1. Æquationis Cubicæ $x^3 = 2x^2 + 3x + 4$ ſit Radix x indaganda. Erit primò juxta præſcriptum $3p = 2$, ſive $p = \frac{2}{3}$. Secundò $3q - (3p^2)\ \frac{4}{3} = 3$, ſive $q = \frac{13}{9}$. Tertio $2r\ (+p^3 - 3q \times p)$

Digitized by Google

$-\frac{70}{27}=4$, ſive $r=\frac{89}{27}$ & $r^2-q^3=-\frac{212}{27}$. Et propterea $x=\frac{2}{3}+\sqrt[3]{\frac{89}{27}+\sqrt{\frac{212}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{89}{27}-\sqrt{\frac{212}{27}}}$. Reliquæ duæ Radices ſunt impoſſibiles.

2. In Æquatione $x^3=12x^2-41x+42$, erit primò $3p=12$, ſive $p=4$. Secundò $3q-(3p^2)\ 48=-41$, ſive $q=\frac{7}{3}$. Tertiò $2r+(p^3-3q\times p)\ 36=42$, ſive $r=3$; Et inde $r^2-q^3=-\frac{100}{27}$. At Binomii ſurdi $3+\sqrt{-\frac{100}{27}}\ (=r+\sqrt{r^2-q^3})$ Radix Cubica, per Methodos ex Arethmeticâ petendas extracta, eſt $-1+\sqrt{-\frac{4}{3}}$, $(=m+\sqrt{n},)$ & proinde Radix $x=(p+2m=4-2=)\ 2$ vel etiam $x=(p-m\pm\sqrt{-3n}=4+1\pm(\sqrt{4}=2=)\ 7$ vel 3. Vel rurſus, ejuſdem Binomii $3+\sqrt{-\frac{100}{27}}$ Radix alia Cubica (tres enim agnoſcit) eſt $\frac{3}{2}+\sqrt{-\frac{1}{12}}\ (=m+\sqrt{n},)$ & proinde Radix $x=(p+2m=4+3=)\ 7$, & etiam $x=(p-m\pm\sqrt{-3n}=4-\frac{3}{2}\pm(\sqrt{\frac{1}{4}})\ \frac{1}{2}=3$ vel 2. Vel denuò, ejuſdem Binomii $3+\sqrt{-\frac{100}{27}}$ Radix cubica tertia eſt $-\frac{1}{2}=\sqrt{-\frac{25}{12}}$, $(=m+\sqrt{n},)$ & proinde Radix $x=(p+2m=4-1=)\ 3$, atque etiam $x=(p-m\pm\sqrt{-3n}=4+\frac{1}{2}\pm(\sqrt{\frac{25}{4}})\ \frac{5}{2}=)\ 7$ vel 2.

3. In Æquatione $x^3=-15x^2-84x+100$, erit $p=-5$, $q=-3$, $r=135$; & Binomii $135+\sqrt{18252}$ Radix Cubica eſt $3+\sqrt{12}$. Igitur Radix $x=-5+6=1$, & $x=-5-3\pm\sqrt{-36}=-8\pm\sqrt{-36}$, impoſſibiles.

4. In Æquatione $x^3 = 34x^2 - 310x + 1012$, erit $p = \frac{34}{3}$, $q = \frac{226}{9}$, $r = \frac{5536}{27}$; & Binomii $\frac{5536}{27} + \sqrt{\frac{707560}{27}}$ Radix Cubica eſt $\frac{16}{3} + \sqrt{\frac{10}{3}}$. Igitur Radix $x = \frac{34}{3} + \frac{32}{3} = 22$, & $x = \frac{34}{3} - \frac{16}{3} \pm \sqrt{-10} = 6 \pm \sqrt{-10}$, impoſſibiles.

5. In Æquatione $x^3 = 28x^2 + 61x - 4048$, erit $p = \frac{28}{3}$. $q = \frac{967}{9}$, $r = -\frac{25010}{27}$; & Binomii $-\frac{25010}{27} + \sqrt{-382347}$. Radix cubica eſt $\frac{41}{6} + \sqrt{-\frac{243}{4}}$. Igitur $x = \frac{28}{3} + \frac{41}{3} = 23$, & $x = \frac{28}{3} - \frac{41}{6} \pm (\sqrt{\frac{729}{4}})\ \frac{27}{2} = 16$ vel -11.

6. In Æquatione $x^3 = -x^2 + 166x - 660$, erit $p = -\frac{1}{3}$, $q = \frac{449}{9}$, $r = -\frac{9658}{27}$; & Binomii $\frac{9658}{27} + \sqrt{-\frac{1147205}{27}}$ Radix Cubica eſt $-\frac{22}{3} + \sqrt{-\frac{5}{3}}$. Igitur $x = -\frac{1}{3} - \frac{44}{3} = -15$, & $x = -\frac{1}{3} + \frac{22}{3} \pm \sqrt{5} = 7 \pm \sqrt{5}$, irrationales.

7. In Æquatione $x^3 = 63x^2 + 99673x + 9951705$, erit $p = 21$, $q = \frac{100996}{3}$, $r = 6031680$; & Binomii $6031680 + \sqrt{-\frac{47887175043136}{27}}$ Radix Cubica eſt $183 + \sqrt{-\frac{529}{3}}$. Igitur $x = 21 + 366 = 387$, & $x = 21 - 183 \pm (\sqrt{529})\ 23 = -139$ vel 185.

Nec ſecus in cæteris procedendum: Inveſtigatur autem Theorema ad modum ſequentem. Pono Æquationis cujuſdam Cubicæ Radicem $z = a + b$, & cubicè multiplicando proveniet $z^3 = (a^3 +$

$3a^2$

$3a^2b + 3ab^2 + b^3 =)$ $a^3 + 3ab \times \overline{a+b} + b^3$. Jam loco ipſius $a + b$ valorem ejus z ſubſtituendo, fiet $z^3 = 3abz + a^3 + b^3$, quæ eſt Æquatio Cubica ex Radice $z = a + b$ conſtructa, cui terminus ſecundus deeſt. Ut hæc verò ad formam magis commodam, magisque concinnam revocentur, ſumo Æquationem $z^3 = 3qz + 2r$, quæ poſthâc ipſius $z^3 = 3abz + a^3 + b^3$, vices gerat. Igitur transmutatione hujus in illam, fiet primò $3q = 3ab$, ſive $q^3 = a^3b^3$; & ſecundò $2r = a^3 + b^3$, ſive $2ra^3 = (a^6 + a^3b^3 =)\ a^6 + q^3$. Et ſolutâ hâc æquatione quadraticâ, erit $a^3 = r + \sqrt{r^2 - q^3}$, & hinc $b^3 = (2r - a^3 =)\ r - \sqrt{r^2 - q^3}$: Atque igitur tandem $a = \sqrt[3]{r + \sqrt{r^2 - q^3}}$ & $b = \sqrt[3]{r - \sqrt{r^2 - q^3}}$. Et propterea in Æquatione Cubicâ $z^3 = 3qz + 2r$ erit Radix $z = (a + b =)$ $\sqrt[3]{r + \sqrt{r^2 - q^3}} + \sqrt[3]{r - \sqrt{r^2 - q^3}}$.

At verò hæc Radix reverâ triplex eſt, pro triplici valore quem induere poteſt & $\sqrt[3]{r + \sqrt{r^2 - q^3}}$ & $\sqrt[3]{r - \sqrt{r^2 - q^3}}$. Cujusvis enim quantitatis Radix Cubica triplex erit, & ipſius Unitatis Radix Cubica vel eſt 1, vel $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, vel $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}$: Atque id adeò, propterea quod harum alicujus Cubus ſit Unitas. Igitur ſi $1 \times \sqrt[3]{r + \sqrt{r^2 - q^3}}$ aut $\sqrt[3]{r + \sqrt{r^2 - q^3}}$ $(= \sqrt[3]{1 \times r + \sqrt{r^2 - q^3}} = \sqrt[3]{1} \times \sqrt[3]{r + \sqrt{r^2 - q^3}})$ Radicem aliquam [quam ſupra nominavimus $m + \sqrt{n}$, aut $1 \times \overline{m + \sqrt{n}}$,] Cubi $r + \sqrt{r^2 - q^3}$ deſignet; ipſæ $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{r + \sqrt{r^2 - q^3}}$ & $\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{r + \sqrt{r^2 - q^3}}$ [i. e. $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \times \overline{m + \sqrt{n}}$ & $\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \times \overline{m + \sqrt{n}}$] alias duas ejusdem Cubi Radices deſignabunt. Similiter & $\sqrt[3]{r - \sqrt{r^2 - q^3}}$, $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$

×

Digitized by Google

$\times \sqrt[3]{r - \sqrt{r^2 - q^3}}$, & $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{r - \sqrt{r^2 - q^3}}$, [i. e. $m - \sqrt{n}$, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \times \overline{m - \sqrt{n}}$, $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \times \overline{m - \sqrt{n}}$,] tres Cubicæ Radices erunt Apotomes $r - \sqrt{r^2 - q^3}$. Atque has Radices debitè connectendo, fiet $z = \sqrt[3]{r + \sqrt{r^2 - q^3}} + \sqrt[3]{r - \sqrt{r^2 - q^3}}$, [i, e. $z = \overline{m + \sqrt{n}} + \overline{m - \sqrt{n}} = 2m$,] $z = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{r + \sqrt{r^2 - q^3}} + \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{r - \sqrt{r^2 - q^3}}$, [i. e. $z = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \times \overline{m + \sqrt{n}} + \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \times \overline{m - \sqrt{n}} = -m + \sqrt{-3n}$,] & $z = -\frac{1-\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{r + \sqrt{r^2 - q^3}} + \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{r - \sqrt{r^2 - q^3}}$ [i. e. $z = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \times \overline{m + \sqrt{n}} + \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \times \overline{m - \sqrt{n}} = -m - \sqrt{-3n}$,] quæ tres erunt Radices Æquationis Cubicæ $z^3 = 3qz + 2r$. Debitè autem connectuntur Radices iſtæ ad modum præcedentem, quippe quæ ſic connexæ, & more vulgari in ſe invicem continuò ductæ, Æquationem $z^3 = 3qz + 2r$ reſtituunt. Denique fac $z = x - p$, & Æquatio fiet $x^3 - 3px^2 + 3p^2x - p^3 = 3qx - pq + 2r$, quæ univerſalis eſt, & cujus Radices evadunt ut ſupra fuerunt exhibitæ.

Hic obiter notatû dignum eſt, quod Æquationis Cubicæ cujuscunque Radices omnes ſint poſſibiles & reales, quoties Binomii membrum irrationale $\sqrt{r^2 - q^3}$ impoſſibilitatem in ſe complectitur; hoc eſt, quoties q eſt quantitas affirmativa, & ſimul cubus ejus major eſt quadrato ex latere r. At ſi membrum iſtud $\sqrt{r^2 - q^3}$ ſit poſſibile, hoc eſt ſi q ſit quantitas negativa, aut etiam ſi affirmativæ cubus ſit minor quadrato ex latere r, tunc unicam tantùm agnoſcit Æquatio Radicem poſſibilem & realem, reliquæque duæ erunt impoſſibiles.

In

In hoc Theoremate ſi fiat $p = o$, hoc eſt, ſi deſit Æquationis terminus ſecundus, tunc deventum erit ad caſum Regularum quæ dicuntur *Cardani*, cujus ſolutio continetur in præcedentibus.

§. 2. Æquationis Biquadraticæ Univerſalis

$$x^4 = 4px^3 + 2qx^2 + 8rx + 4s, \atop \overline{\quad -4p^2 - 4pq - q^2}$$

Radices quatuor ſunt $x = p - a \pm \sqrt{p^2 + q - a^2 - \frac{2r}{a}}$, &

$x = p + a \pm \sqrt{p^2 + q - a^2 + \frac{2r}{a}}$, Ubi a eſt Radix Æquationis Cubicæ $a^6 = \begin{matrix} p^2 \\ +q \end{matrix}\, a^4 \begin{matrix} -2pr \\ -s \end{matrix}\, a^2 + r^2$.

Jam datâ Æquatione quàvis Biquadraticâ, inter ejus hujuſque Æquationis Univerſalis terminos ſingulos inſtituenda eſt comparatio, quò pactò citiſſimè invenientur ipſæ p, q, r, s; & hiſce cognitis, non latebit valor ipſius a, ex Theoremate ſuperiori inveniendus, & tum demum innateſcent Æquationis datæ Radices omnes.

Huic ſolutioni illuſtrandæ Exemplum unum aut alterum ſufficiat.

1. Æquationis Biquadraticæ $x^4 = 8x^3 + 83x^2 - 162x - 936$ ſint Radices extrahendæ. Erit primò juxta præſcriptum $4p = 8$, ſive $p = 2$. Secundò $2q - (4p^2)\ 16 = 83$, ſive $q = \frac{99}{2}$. Tertiò $8r - (4pq)\ 396 = -162$, ſive $r = \frac{117}{4}$. Quartò $4s - (q^2)\frac{9801}{4} = -936$, ſive $s = \frac{6057}{16}$. Hinc $p^2 + q = \frac{107}{2}$, $2pr + s = \frac{7929}{16}$, $r^2 = \frac{13689}{16}$, & proinde $a^6 = \frac{107}{2} a^4 - \frac{7929}{16} a^2 + \frac{13689}{16}$. Jam ut Æquatio hæc aliquatenus Cubica in Radices ejus reſolvatur, ad Theorema præcedens recurrendum eſt, in quo erit $p = \frac{107}{2}$, $q = \frac{22009}{144}$, $r = \frac{2903023}{1728}$, & $r^2 - q^3 = -\frac{11940075}{16}$. Atqui Binomii $\frac{2903023}{1728} + \sqrt{-\frac{11940075}{16}}$

Radix Cubica eſt $-\frac{53}{12}+\sqrt{-\frac{400}{3}}$ & propterea $a^2=\frac{107}{6}-\frac{53}{6}=9$, & etiam $a^2=\frac{107}{6}+\frac{53}{12}\pm(\sqrt{400}\ 20=)\ \frac{169}{4}$ vel $\frac{9}{4}$: Vel quod perinde eſt, Æquationis præmiſſæ reverà Cubicæ ſex Radices ſunt $a=\pm 3$, $a=\pm\frac{13}{2}$, & $a=\pm\frac{3}{2}$, quarum quævis indiſcriminatim propoſito noſtro faciet ſatis. Puta ſi in præſenti caſû fiat $a=3$, erit juxta Theorema $x=(p-a\pm\sqrt{p^2+q-a^2-\frac{2r}{a}}=)\ 2-3\pm\sqrt{4+\frac{99}{2}-9-\frac{39}{2}}=-1\pm(\sqrt{25}\ 5=)\ 4$ vel -6, & $x=(p+a\pm\sqrt{p^2+q-a^2+\frac{2r}{a}}=)\ 2+3\pm\sqrt{4+\frac{99}{2}-9+\frac{39}{2}}=5\pm(\sqrt{64}\ 8=)$ 13 vel -3, quæ ſunt Æquationis datæ Radices quatuor.

2. In Æquatione $x^4=20x^3+252x^2-6592x+21312$, erit $p=5$, $q=176$, $r=-384$, & $s=13072$. Hinc $p^2+q=201$, $2pr+s=9232$, & $r^2=147456$; & inde $a^6=201a^4-9232a^2+147456$. Jam in Theoremate pro Cubicis erit $p=67$, $q=\frac{4235}{3}$, & $r=65219$; eritque Binomii $65219+\sqrt{\frac{3888930707\cdot 2}{27}}$ Radix Cubica $\frac{77}{2}+\sqrt{\frac{847}{12}}$. Igitur $a^2=67+77=144$, ſive $a=12$; & proinde $x=5-12\pm\sqrt{25+176-144+64}=-7\pm(\sqrt{121}\ 11=)\ 4$ vel -18, & $x=5+12\pm\sqrt{25+176-144-64}=17\pm\sqrt{-7}$, impoſſibiles.

Hujus autem Theorematis Inventio eſt hujuſmodi. Ex duarum Æquationum Quadraticarum $z^2+2az-b=0$, & $z^2-2az-c=0$ in ſe invicem multiplicatione, Æquationem conficio Biquadraticam $z^4=\overline{4a^2+b+c}\times z^2+\overline{2ac-2ab}\times z-bc$, cui terminus ſecundus deeſt, quamque huic Æquationi $z^4=ez^2+fz+g$ ſtatuo æquipollere. Unde primò $4a^2+b+c=e$ ſive $b=e-4a^2-c$.

Se-

Secundò $2ac - 2ab = f$, hoc eſt, $2ac - 2ae + 8a^3 + 2ac = f$, ſive $c = \frac{f}{4a} + \frac{e}{2} - 2a^2$, & inde $b = (e - 4a^2 - c =) - \frac{f}{4a} + \frac{e}{2} - 2a^2$. Tertiò $-bc = g$, ſive $-\frac{f^2}{16a^2} + \frac{e^2}{4} - 2ea^2 + 4a^4 = -g$, hoc eſt, $a^6 = \frac{1}{2}ea^4 - \frac{1}{4}ga^2 - \frac{1}{16}e^2a^2 + \frac{f^2}{64}$, quæ Æquatio quaſi Cubica eſt, ex Radice a^2 & notis vel aſſumptis e, f, g conflata. Ea verò Radix per Theorema ſuperius exhiberi poteſt; & eodem calculo innoteſcent ipſæ b & c. At Æquàtionum $z^2 + 2az - b = 0$ & $z^2 - 2az - c = 0$ Radices ſunt $z = -a \pm \sqrt{a^2 + b}$ & $z = a \pm \sqrt{a^2 + c}$, ſive $z = -a \pm \sqrt{\frac{1}{2}e - a^2 - \frac{f}{4a}}$, & $z = a \pm \sqrt{\frac{1}{2}e - a^2 + \frac{f}{4a}}$, quæ proinde erunt Radices Æquationis $z^4 = ez^2 + fz + g$; cognita videlicet a vel a^2 ex Æquatione $a^6 = \frac{1}{2}ea^4 - \frac{1}{4}ga^2 - \frac{1}{16}e^2a^2 + \frac{f^2}{64}$. Jam ut Æquatio iſta evadat univerſalis, & omnibus ſuis terminis inſtructa, fac $z = x - p$, eritque $x^4 - 4px^3 + 6p^2x^2 - 4p^3x + p^4 = ex^2 - 2pex + p^2e + fx - fp + g$, item & $x = p - a \pm \sqrt{\frac{1}{2}e - a^2 - \frac{f}{4a}}$, & $x = p + a \pm \sqrt{\frac{1}{2}e - a + \frac{f}{4a}}$. Tandem concinnitatis & compendii gratiâ, fac $e = 2q + 2p^2$ & $f = 8r$; tum $x^4 - 4px^3 + 4p^2x^2 = 2qx^2 - 4pqx + 2p^2q + p^4 + 8rx - 8pr + g$, $x = p - a \pm \sqrt{p^2 + q - a^2 - \frac{2r}{a}}$, $x = p + a \pm \sqrt{p^2 + q - a^2 + \frac{2r}{a}}$, & $a^6 = \overline{p^2 + q} \times a^4 - \overline{\frac{1}{4}g + \frac{3}{4}p^4 + \frac{1}{2}p^2q + \frac{1}{4}q^2} \times a^2 + r^2$. Denique fac $g = 4s - q^2 + 8pr - p^4 - 2p^2q$, & fiunt Æquationes præcedentes

$$\begin{array}{llll} x^4 = 4px^3 + 2qx^2 + 8rx + 4s & \& \; a^6 = p^2a^4 - 2pra^2 + r^2. \\ \quad\quad\;\; - 4p^2 \; - 4pq - q^2 & \quad\quad\quad\;\; + q \quad\quad\; - s \end{array}$$

Scilicet omnia evadunt ut ſupra ſunt poſita.

§. 3. Hactenus de Æquationum Cubicarum & Biquadraticarum Reſolutione Analytica. Quoniam autem earundem *Effectio Geometrica* per Parabolam vulgo tradi ſolet, & nonnullis in pretio eſt,

 ipſam

ipſam συνοπτικῶς, & quidem univerſalius non pigebit hic exhibere.

Data Æquatione quâvis vel Cubicâ vel Biquadratica, inſtituenda eſt comparatio inter terminòs ejus, terminosque reſpondentes hujus Æquationis

$$\begin{array}{llllll} x^4 = \frac{2p}{q} x^3 & + \frac{4pr}{q} x^2 & + \frac{2p^2}{q} x & + p^2, \\ \quad - 4r & - 4r^2 & - \frac{2ps}{q} & - q^2 \\ & + 2s & + 4rs & - s^2 \\ & - 1 & - 2g & + t^2 \end{array}$$

quo pacto facile ſatis eruentur ipſæ p, q, r, s, t; earum interim unâ aliquâ utcunque pro lubitu aſſumpta. Tum in Parabola quâvis data AVB, cujus Vertex principalis V, Axis VS, & Axi perpendicularis VT; capiatur VS $= p$ verſus interiora Parabolæ, & in angulo SVT inſcribatur ST $= q$, quæ producta Parabolam ſecet in punctis binis N & O. Biſecetur ON in M, & per M agatur MA Axi Parallela & Parabolæ occurrens in A. Ipſi ON parallela ducatur AL, ut ſit AL Latus rectum Parabolæ ad Diametrum AM, ſitque hæc eadem Unitas. In AL (utrinque ſi opus eſt producta capiatur AG $= r$, & à puncto G ducatur GR Axi parallela, quæ Parabolam ſecet in B, à quo capiatur BR $= s$. A noviſſimè invento puncto R ducatur RE ipſi VT parallela & æqualis, quæ ſiniſtram verſus jaceat, reſpectû ipſius R ſi q ſit quantitas affirmativa, at verſus dextram ſi q ſit negativa. Atque idem de ipſis AG & BR intelligatur, quæ ad contrarias itidem partes duci debent, ſi modò valores ipſarum r & s prodeant negativi. Denique centro E & Radio EC $= t$ deſcribatur Circulus CK kc, qui Parabolam in totidem ſecabit punctis, quot ſunt Æquationis datæ Radices reales. Etenim à punctis iſtis C, K, &c. ducantur CP, K . &c. ipſi ST parallelæ, & ad rectam GR (ſi opus eſt productam) terminatæ, eritque harum quævis x, ſeu Æquationis datæ Radix quæſita; eæ ſcilicet ad dextram jacentes erunt Radices affirmativæ, quæ verò ad ſiniſtram ſunt poſitæ, erunt Radices negativæ. Punctum contactus, ſi quod fuerit, hîc ſumitur pro interſectionis punctis duobus ad invicem viciniſſimis.

TAB. XII Fig. 1.

In-

Inter Æquationes Cubicas & Biquadraticas ita conſtructas hoc tantum intercedit diſcriminis, quod in prioribus, ob terminum ultimum in præcedente Æquatione deficientem, ſemper ſit $p^2 - q^2 - s^2 + t^2 = 0$, ſive $t = \sqrt{s^2 + q^2 - p^2}$. Igitur centro C & Radio EB ($= \sqrt{BRq + (ERq) STq - VSq}$) deſcripto Circulo CK$kc$, Radicum una CP in priore conſtructione in nihilum abit.

Hæc autem demonſtrantur ad modum ſequentem Manentibus jam conſtructis, & productâ CP, ſi opus eſt, donec ſecat AM in H, erit CH ordinata Parabolæ ad Diametrum AH, & proinde $CHq = AL \times AH = AH$, ob $AL = 1$. At $CH = CP + AG$, & $AH = GB + BP$, & propterea $CPq + 2AG \times CP + AGq = GB + BP$; ſed ob naturam Parabolæ erit $AGq = GB$, unde $CPq + 2AG \times CP = BP$. Jam à puncto C ad ipſam BP demittatur norma CD, quæ occurrat etiam ipſi EI, ad BP actæ parallelæ, in puncto I. Propter Similia Triangula CDP & TVS, erit $DP = \frac{VS \times CP}{ST}$ & $CD = \frac{VT \times CP}{ST}$, & proinde $CPq + 2AG \times CP = BP = DP + BD = \frac{VS \times CP}{ST} + BR - IE$, ſive $CPq + 2AG \times CP - \frac{VS}{ST}CP - BR = -IE$. Aſt $IEq = CEq - CIq = CEq - CDq - VTq - 2CD \times VT = CEq - \frac{VTq \times CPq}{STq} - VTq - \frac{2VTq \times CP}{ST} =$ (ob $VTq = STq - SVq$) $CEq - CPq + \frac{SVq}{STq}CPq - STq + SVq - 2ST \times CP + \frac{2SVq}{ST}CP$, quæ igitur æqualis erit Quadrato ex Latere $CPq + 2AG \times CP - \frac{VS}{ST}CP - BR$. Atque hæc Æquatio ad terminos p, q, r, s, t revocata ipſiſſima fit Æquatio propoſita.

Hinc liquet, quod eadem quævis Æquatio Biquadratica innumeras per Parabolam conſtructiones ſortiri poſſit, pro indefinito valo-

re quantitatis iſtius, quam ad arbitrium aſſumi poſſe jam diximus. Sed caſus eſt ſimpliciſſimus faciendo $VS = p = 0$, & migrat conſtructio, ſi rem ipſam ſpectes, in Vulgarem iſtam, in quâ Radicum repræſentatrices rectæ CP, &c. Sunt ad Axem perdiculares. Æquatio autem fit

$$\begin{array}{lllll} x^4 = & -4rx^3 & -4r^2x^2 & +4rsx & -q^2 \\ & & +2s & -2q & -s^2 \\ & & -1 & & +t^2 \end{array}$$,quæ facilè conſtruitur ut ſupra.

§. 4. Sed ne Parabolæ deſcriptio Organica difficilis nimium videatur, in promptu eſt Artificium quoddam Mechanicum, ope Fili penduli pondere inſtructi peractum, cujus auxilio quàm exactiſſimè & facillime Æquatio noviſſima conſtrui poteſt, & proinde Æquationum quarumcunque Cubicarum & Biquadraticarum Radices inveniri; idque ſine ullô linearum ductû niſi Rectarum & Circuli. Conſtructio autem, quam appellare libet *Mechanicam*, eſt ad hunc modum.

TAB. XII. fig. 2. Contra Parietem erectum, vel planum aliud quodvis Horizonti perpendiculare, ad punctum aliquod F ſuſpendatur filum tenuiſſimum & flexile FP; pondere quôvis P ad extremitatem P appenſô. In hoc filo notetur punctum aliquod N, à puncto ſuſpenſionis F ſatis remotum; vel filo parvulus, ſi id mavis, innectatur nodus N.. Et ſumpta utcunque NO pro Unitate ad punctum medium A ducatur (in plano prædicto) recta AQ Horizonti parallela, & utrinque quantum ſatis producta. Hiſce generaliter paratis, pro particulari jam applicatione fac $AQ = r$; ipſis q, r, s, t, ut ſæpius inculcatum, vel Arithmeticè vel Geometricè, pro datæ cujusvis Æquationis exigentia, in Æquatione noviſſima priùs determinatis Tunc Acû vel ſtylo tenuiſſimo, aut etiam cuſpide Circini admodum gracili, flectatur filum à loco ſuo ad punctum quoddam B, ita ut punctum N cadat in noviſſimè invento puncto Q. In BQ ab iſto B capiatur $BR = s$, & in R ad ipſam BR perpendicularis erigatur $ER = q$. Verùm enim verò iſtæ AQ, BR, RE, ad contrarias partes ab earum initiis cadere debent, ſi fortè valores ipſarum r, s, q prodeant negativi. Denique in puncto invento E figatur Circini crus unum, &, ad diſtantiam $EZ = t$ extentum, agatur crus alterum

rum

rum in orbem, ſecumque circumducat filum FZP. Hâc fili circulatione pondus P nunc aſcendet nunc deſcendet motu reciproco, ut & Nodus N nunc ſupra rectam AQ extabit, nunc verò infra eandem deprimetur. Quoties autem reperietur Nodus ille N in ipſa AQ puta in punctis D, d Δ, δ, abſcindet is rectas DQ, dQ, ΔQ, δQ, quæ erunt Æquationis datæ Radices omnes reales; hæ nempe ad dextram erunt Radices affirmativæ, illæ verò ad ſiniſtram Radices negativæ. Demonſtratio eſt Manifeſta ex præcedentibus, habitâ tantùm ratione Parabolæ, per puncta B, C, c, k, K, tranſeuntis. Nam poſito F foco Parabolæ, (cujus diſtantia à Vertice aſt $\frac{1}{4}$ON,) notum eſt quod lineæ omnes ut FB + BQ, FC + CD, &c, eandem ubique conficiant ſummam.

Atque ex principiis hic poſitis proclive erit Inſtrumentum haud inconcinnum & quantumvis accuratum fabricari, cujus beneficio hujuſmodi Æquationum quarumcunque Radices nullô ferè negotiô inveniri poſſint, & præ oculis exhiberi. Hoc autem quilibet, ſi id Curæ ſit, variis modis pro ingenio ſuo efficere poteſt; & de his jam ſatis.

ÆQUA-

Digitized by Google

ÆQUATIONUM QUARUNDAM

Poteſtatis tertiæ, quintæ, ſeptimæ, nonæ, & ſuperiorum, ad infinitum uſque pergendo, in terminis finitis, ad inſtar Regularum pro Cubicis quæ vocantur Cardani, Reſolutio Analytica.

Per AB. DE MOIVRE, R. S. S.

SIt n Numerus quicunque, y quantitas incognita, ſive Æquationis Radix quæſita, ſitque a quantitas quævis omninò cognita, ſive ut vocant Homogeneum Comparationis: Atque horum inter ſe relatio exprimatur per Æquationem

$$ny + \frac{nn-1}{2\times3}ny^3 + \frac{nn-1}{2\times3}\times\frac{nn-9}{4\times5}ny^5 + \frac{nn-1}{2\times3}\times\frac{nn-9}{4\times5}\times\frac{nn-25}{6\times7}ny^7, \text{ \&c.} = a$$

Ex hujus ſeriei naturâ manifeſtum eſt, quod ſi n ſumatur numerus aliquis impar (integer ſcilicet, nec refert utrum ſit affirmativus vel negativus) tunc ſeries ſponte ſua terminabitur, & Æquatio ſit una ex ſupra præfinitis, cujus Radix eſt

$$(1)\ y = \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{\sqrt{1+aa}+a} - \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{\sqrt{1+aa}+a}}$$

$$\text{vel } (2)\ y = \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{\sqrt{1+aa}+a} - \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{\sqrt{1+aa}-a}$$

$$\text{vel } (3)\ y = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{\sqrt{1+aa}-a}} - \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{\sqrt{1+aa}-a}$$

$$\text{vel } (4)\ y = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{\sqrt{1+aa}-a}} - \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{\sqrt{1+aa}+a}}$$

Exem-

Digitized by Google

Exempli gratia, ſit hujus Æquationis poteſtatis quintæ $5y + 20y^3 + 16y^5 = 4$ Radix invenienda, quo in caſu erit $n = 5$ & $a = 4$. Radix juxta formam primam erit $y = \frac{1}{2}\sqrt[5]{\sqrt{17}+4} - \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[5]{\sqrt{17}+4}}$, quæ in numeris vulgaribus expeditiſſimè explicari poteſt ad hunc modum. Eſt $\sqrt{17}+4 = 8.1231$, cujus Logarithmus 0.9097164, & hujus pars quinta 0.1819433, huic reſpondens numerus eſt $1.5203 = \sqrt[5]{\sqrt{17}+4}$. Ipſius verò 0.1819433 Complementum Arithmeticum eſt, 9.8180567. cui reſpondet numerus $0.6577 = \frac{1}{\sqrt[5]{\sqrt{17}+4}}$. Igitur horum numerorum ſemidifferentia $0.4313 = y$.

Hic venit obſervandum quod loco Radicis generalis, non incommodè ſumeretur $y = \frac{1}{2}\sqrt[n]{2a} - \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{2a}}$, quando numerus a reſpectu unitatis, eſt ſatis magnus, ut ſi Æquatio fuerit $5y + 20y^3 + 16y^5 = 682$, erit Log. $2a = 3.1348143$, cujus pars quinta 0.6269628, & huic reſpondens numerus 4.236. Complementi autem Arithmetici 9.3730372 numerus eſt 0.236 & horum numerorum ſemidifferentia $2 = y$.

Atqui præterea, ſi in Æquatione præcedenti ſigna alternatim ſint affirmantia & negantia, vel quod eodem redit, ſi ſeries obvenerit hujusmodi

$$ny + \frac{1-nn}{2\times3}ny^3 + \frac{1-nn}{2\times3}\times\frac{9-nn}{4\times5}ny^5 + \frac{1-nn}{2\times3}\times\frac{9-nn}{4\times5}\times\frac{25-nn}{6\times7}ny^7, \text{ \&c.} = a$$

erit hujus Radix

$$(1)\ y = \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{a+\sqrt{aa-1}} + \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{a+\sqrt{aa-1}}}$$

Mm vel

vel (2) $y = \frac{1}{2}\sqrt[n]{a + \sqrt{aa - 1}} + \frac{1}{2}\sqrt[n]{a - \sqrt{aa - 1}}$

vel (3) $y = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{a - \sqrt{aa - 1}}} + \frac{1}{2}\sqrt[n]{a - \sqrt{aa - 1}}$

vel (4) $y = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{a - \sqrt{aa - 1}}} + \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{a + \sqrt{aa - 1}}}$

Hic autem notandum, quòd ſi $\frac{n-1}{2}$ numerus extiterit impar, Radicis inventæ ſignum in ei contrarium permutandum eſt.

Proponatur Æquatio $5y - 20y^3 + 16y^5 = 6$, unde $n = 5$ & $a = 6$. Erit Radix $= \frac{1}{2}\sqrt[5]{6 + \sqrt{35}} + \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[5]{6 + \sqrt{35}}}$ Vel quoniam $6 + \sqrt{35} = 11.916$, erit hujus logarithmus 1.0761804 & ejus pars quinta 0.2152561, Complementum verò Arithmeticum 9.7847439. Horum Logarithmorum numeri ſunt 1.6415 & 0.6091 reſpectivè, quorum ſemiſumma $1.1253 = y$.

Verùm ſi acciderit ut a ſit minor unitate, tunc Radicis forma ſecunda, ut quæ propoſito eſt magis conveniens, præ reliquis ſeligenda eſt. Sic ſi Æquatio fuerit $5y - 20y^3 + 16y^5 = \frac{61}{64}$, erit $y = \frac{1}{2}\sqrt[5]{\frac{61}{64} + \sqrt{\frac{-375}{4096}}} + \frac{1}{2}\sqrt[5]{\frac{61}{64} - \sqrt{\frac{-375}{4096}}}$. Et quidem ſi Binomialium Radix quintana ullo pacto extrahi queat, prodibit Radix proba & poſſibilis, etſi expreſſio ipſa impoſſibilitatem mentiatur. Binomialis verò $\frac{61}{64} + \sqrt{\frac{-375}{4096}}$ Radix quintana eſt $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{-15}$, & Binomialis $\frac{61}{64} - \sqrt{\frac{-375}{4096}}$ Radix itidem quintana eſt $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{-15}$, quorum Binomialium ſemiſumma $= \frac{1}{4} = y$.

Si autem extractio iſta vel non peragi poſſet, vel etiam difficilior videretur, res ubique confici poteſt per Tabulam ſinuum naturalium ad modum ſequentem.

Digitized by Google

Ad Radium 1 ſit $a = \frac{61}{64} = 0.95112$ ſinus arcûs cujuſdam, qui proinde erit 72°: 23° cujus pars quinta (eo quod $n = 5$) eſt 14°: 28°; hujus ſinus 0.24981 = $\frac{1}{4}$ proximè. Nec ſecus procedendum in Æquationibus graduum ſuperiorum.

Digitized by Google

DE CONSTRUCTIONE PROBLEMATUM

Solidorum, ſive Æquationum tertiæ vel quartæ poteſtatis, unicâ datâ Parabola ac Circulo efficienda; diſſertatiuncula.

Authore EDM. HALLEY.

Quo pacto æquationes omnes Cubum vel Quadrato-quadratum quantitatis incognitæ involventes, ope Parabolæ cujuſcunque datæ & Circuli, conſtrui poſſint, clarè tradit ac liquide demonſtrat præclarus ille *Carteſius* in Lib. III. Geometriæ ſuæ: Sed primum jubet ſecundum æquationis terminum, ſi adfuerit, tollere, ac deinde reductæ æquationis Radices regulâ ibidem expoſitâ elicere. Cum verò operatio iſta nimis laborioſa videatur, nonnullis viſum eſt conſtructionem ſimilem etiam abſque ullâ prævià reductione comminiſci; inter quos *Franciſcus* a *Schooten* Methodum valde facilem ac ſimpliciſſimam pro conſtruendis Cubicis quomodolibet affectis prodidiſſet, ſi modò, expoſito principio unde regulam derivavit, Lectoris memoriæ, quam plurimis ac intricatis cautionibus obruit, melius ſtuduiſſet. Nuper verò Vir Cl. D. *Thomas Baker* noſtras, integro libello de conſtructionibus hiſce conſcripto, non ſolùm Cubicas, ſed etiam Biquadraticas omnes cujuſcunque generis unicâ generali regulâ complexus eſt, eamque demonſtrationibus ac Exemplis per omnes caſus abundè ſatis illuſtravit; nec non ſub finem modum proponit unde regula iſta generalis inveſtigari poſſit: Haud tamen illum ipſum oſtendit, cujus ope (uti ſuſpicor) Clavem ſuam Geometricam Catholicam obtinuit, vel ſaltem multò faciliùs obtinere potuit. Cumque perplexis cautionibus de ſignis + &— Regula hæc D. *Bakeri* non minùs obnoxia fuit quàm illa *Schooteni*, ut vix abſente libro conſtructiones illas quis tutò peragat; haud injucundum nec Tyronibus incommodum fore viſum eſt, utriuſque fundamentum expo-

ponere, ac ſimul, emendatâ Methodo, in re tam difficili, lucem quantum valeam afferre.

Conſtructio quam tradit *Carteſius*, quæque facillimè radices æquationum omnium Cubicarum vel Biquadraticarum, ubi deficit ſecundus terminus eruit, ut nota ſupponi poteſt; attamen cùm cardo ſit à quo ſubſequentia pendent, ne diſſertatiuncula hæc capite truncata videatur, ex illius Geometriâ deſumptam placuit Regulam adjungere, pauculis nonnullis in melius uti reor tranſpoſitis.

Deficiente ſecundo termino omnes æquationes Cubicæ reducuntur ad hanc formam $z^3 * . apz . aaq = o$, ac Biquadraticæ ad hanc $z^4 . * . apzz . aaqz . a^3 r = o$. (ubi *a* deſignat Latus rectum Parabolæ cujusvis datæ, quam in Conſtructione adhibere licet,) vel ſumendo *a* pro Unitate, ad hanc $z^3 * . pz . q = o$, vel ad hanc $z^4 * . pzz . qz . r = o$.

Jam data Parabola FAG cujus Axis ſit ACDKL ac latus rectum *a* vel 1, fiat AC ejus dimidium, ac collocetur ſemper à vertice A verſus interiora figuræ: dein ſumatur $CD = \frac{1}{2} p$ in lineâ illâ AC continuata verſus C ſi in æquatione fuerit $- p$, vel verſus alteram partem ſi habeatur $+ p$. Porrò è puncto D, aut ex puncto C ſi non habeatur quantitas *p*, erigenda eſt ad axem perpendicularis DE æqualis $\frac{1}{2} q$, dextrorſum quidem ſi fuerit $- q$, ad alterum verò axis latus ſi fuerit $+ q$; ac Circulus centro E radio AE deſcriptus, ſi æquatio fuerit tantùm Cubica, Parabolam tot punctis F & G interſecabit quot veras habet Radices, quarum quidem affirmativæ ut GK erunt ad dextram Axis partem, negativæ ut FL ad ſiniſtram. TAB. XII. fig. 3.

At ſi Æquatio Biquadratica fuerit, augeri vel minui debet Circuli Radius AE addendo, ſi fuerit $- r$, vel ſubducendo, ſi ſit $+ r$, ex ejus quadrato rectangulum *ar*, ſeu contentum ſub Latere recto & quantitate data *r*; id quod nullo ferè negotio efficitur Geometricè. Hujus verò Circuli interſectiones cum Parabola omnes veras Biquadraticæ Æquationis radices dimiſſis ad Axem perpendiculis exhibebunt; Affirmativas quidem ad dextram Axis; Negativas verò ad ſiniſtram. Totius demonſtrationem *Carteſio* ejus inventori relinquo.

Notandum hic me operam dare ut ſemper habeantur Radices affirmativæ ad dextram Axis Latus, ut evitetur confuſio à pluribus cautionibus, quarum cauſa minimè evidens eſt, neceſſariò oritura.

His præmiſſis, ut aditus pateat ad conſtructionem etiam earum æquationum ubi reperitur terminus ſecundus, conſideranda venit Regula pro tollendo termino ſecundo, ac reducendâ æquatione ad aliam, quæ Methodo præcedente conſtrui poſſit. Omnes verò hujus Claſſis æquationes cubicæ ad hanc formam $z^3 . bzz . apz . aaq = o$, vel ad hanc $z^3 . bzz . * . aaq = o$; Biquadraticæ verò ad hanc $z^4 . bz^3 . apzz . aaqz . a^3 r = o$, vel hanc $z^4 . bz^3 . * . aaqz . a^3 r = o$, vel $z^4 . bz^3 . apzz . * . a^3 r = o$ vel denique ad hanc $z^4 . bz^3 . * . * . a^3 r = o$ reduci poſſunt: è quibus omnibus, prout ſignis + & — diverſimodè connectantur, ingens oritur varietas, unde Regula generalis omnibus inſerviens obſcura ac maximè difficilis redditur, niſi methodo quam ſubjungimus illuſtrata nodiſque extricata tractetur.

Tollitur in Biquadraticis ſecundus terminus, ponendo $x = z + \frac{1}{4} b$, ſi fuerit $+ b$ in æquatione vel $x = z - \frac{1}{4} b$ ſi fuerit $- b$: hinc $x - \frac{1}{4} b$ in primo caſu, & $+ \frac{1}{4} b$ in altero æquatur z; & in æquatione quâvis propoſita, ſubſtituta loco z quantitate æqualis prodcbit nova æquatiò termino ſecundo carens, cujus radices omnes x data differentia $\frac{1}{4} b$ vel excedunt vel deficiunt à radice quæſita z: Cùm verò in rebus iſtiusmodi plus exempla quàm præcepta valere ſolent, proponatur una vel altera æquatio Conſtruenda.

Exemplum I.

$z^4 + bz^3 - apzz - aaqz + aaar = o.$

Sit $x - \frac{1}{4} b = z$ Et erit

$xx - \frac{1}{2} bx + \frac{1}{16} bb = zz$

$xxx - \frac{3}{4} xxb + \frac{3}{16} xbb - \frac{1}{64} bbb = z^3$

& $x^4 - bx^3 + \frac{3}{8} bbxx - \frac{1}{16} b^3 x + \frac{1}{256} b^4 . = z^4.$

hinc

hinc

$$
\begin{aligned}
x^4 - bx^3 + \tfrac{3}{8}bbxx - \tfrac{1}{16}bbbx + \tfrac{1}{256}b^4. &= z^4 \\
+ bx^3 - \tfrac{3}{4}bbxx + \tfrac{3}{16}bbbx - \tfrac{1}{64}b^4 &= + bz^3 \\
- apxx + \tfrac{1}{2}apbx - \tfrac{1}{16}apbb &= - apzz \\
- aaqx + \tfrac{1}{4}aaqb &= - aaqz \\
+ aaar &
\end{aligned}
$$

Harum omnium ſumma fit æquatio nova ſecundo termino carens, quæque proinde juxta regulam Carteſianam conſtrui poſſit, ſumendo loco $\frac{1}{2}p$ dimidium coefficientis termini tertii per a ſive Latus rectum diviſi, hoc eſt $-\frac{3bb}{16a} - \frac{1}{2}p$; ac Loco $\frac{1}{2}q$, dimidium coefficientis termini quarti per aa diviſi, ſive $+\frac{bbb}{16aa} + \frac{pb}{4a} - \frac{1}{2}q$. Cujus partes ſigno + notatæ ſiniſtrorſum ab Axe, ſigno — notatæ dextrorſum collocandæ ſunt, ut habeatur centrum Circuli ad conſtructionem requiſiti, ac cujus interſectiones cum Parabola, dimiſſis in axem perpendiculis, radices omnes veras x deſignent, affirmativas quidem ad dextram axis, negativas verò ad ſiniſtram. Cùm verò $x - \frac{1}{4}b = z$, ducendo lineam Axi parallelam, ad dextrum ejus latus & ad diſtantiam $\frac{1}{4}b$, perpendicula illa ad hanc parallelam terminata deſignabunt omnes radices quæſitas z, affirmativas ad dextram, negativas verò ad ſiniſtram. Radium circuli quod attinet, habetur ille addendo partes negativas ac auferendo partes affirmativas termini quinti per aa diviſi, e quadrato lineæ AE, à centro invento E ad Verticem Parabolæ A ductæ: id quod maxima ex parte efficitur capiendo, loco lineæ AE, lineam, quæ ad interſectionem Parabolæ ac parallelæ prædictæ terminatur; ejus enim quadratum omnes termini quinti partes ex ablatione termini ſecundi æquationi novæ ingeſtas complectitur (uti facilè probabitur:) ac reſtat ſolummodò ut hujus lineæ quadratum augeatur, ſi in æquatione habeatur $-r$, vel minuatur ſi ſit $+r$, additione vel ſubductione rectanguli ar, unde conflatur quadratum Radii Circuli quæſiti.

Hæc eſt Methodus inveſtigandi regulam centralem D[ni] *Bakeri* omni-

mnibus cautionibus libera ac ſatis facilis; ac ſola differentia ex eo provenit, quod ego juxta Axem, ille vero juxta Axi parallelam circuli ejusdem centrum determinat: quódque ego ſemper radices affirmativas ex Axis dextro latere invenio, quas ille nunc dextro nunc ſiniſtro conſtituit.

Æquationes Cubicas quod attinet, eæ reduci debent ad Biquadraticas, antequàm eâdem Regulâ generali conſtrui poſſint; id quod fit ducendo æquationem propoſitam in radicem ſuam z, unde provenit æquatio Biquadratica in quâ deficit terminus ultimus ſive r: quapropter ſublato ſecundo termino & invento centro E, circulus ducendus eſt per ipſam interſectionem Parabolæ & parallelæ ad Axem ſuperius memoratæ; cùm ſcilicet ar ſit $= o$, & in nova æquatione totus terminus quintus ex ipſâ ablatione termini ſecundi oriatur. Conſtruenda ſit hæc æquatio.

Exemplum II.

$z^3 - bzz + apz + aaq = 0$: Quæ ducta in z fit

$z^4 - bz^3 + apzz + aaqz = 0$,

Ad tollendum ſecundum terminum ponatur $x + \frac{1}{4}b = z$, & fiet

$$\begin{array}{l} x^4 + bx^3 + \frac{3}{8}bbxx + \frac{1}{16}b^3x + \frac{1}{256}b^4 = + z^4 \\ \quad - bx^3 - \frac{3}{4}bbxx - \frac{3}{16}b^3x - \frac{1}{64}b^4 = - z^3 \\ \qquad + apxx + \frac{1}{2}abpx + \frac{1}{16}apbb = + apzz \\ \qquad\qquad + aaqx + \frac{1}{4}aaqb = + aaqz \end{array}$$

In hac nova Æquatione, tertii termini ſemicoefficiens per a diviſa, viz. $-\frac{3bb}{16a} + \frac{1}{2}p$, loco $\frac{1}{2}p$ uſurpanda eſt; ac coefficientis termini quarti dimidium, diviſum per aa Lateris recti quadratum, viz. $-\frac{bbb}{16aa} + \frac{pb}{4a} + \frac{1}{2}q$, vicem ipſius $\frac{1}{2}q$ in conſtructione *Carteſii* ſubit; unde centrum E determinatur. Deinde ducta Axi parallela ad diſtantiam $\frac{1}{4}b$ ad ſiniſtrum ejus latus $(o\,bx + \frac{1}{4}b = z)$ cujus interſectio cum Parabola ſit O; circulus centro E, Radio EO deſcriptus Parabolam ſecet vel tanget in tot punctis quot æquatio veras habet radices: quæ quidem radices ſeu z ſunt perpendicula de pun-

punctis illis in Axi parallelam demiſſa, ad dextram quidem affirmativæ, negativæ ad ſiniſtram.

Si in æquatione defuerit terminus tertius vel quartus vel uterque, in inveſtiganda regula centrali nulla omninò obſervanda eſt Methodi differentia, ſed deficiente quantitate p vel q, deerunt partes illæ linearum CD ac DE ex quantitate illa aliquo modo deductæ, ac procedendum eſt cum reliquis cœfficientibus termini tertii & quarti in æquatione novâ, ſicut in præmiſſis exemplis præſcriptum eſt.

Hactenus Cl. *Bakeri* methodum generalem pertractavimus, qua quidem nulla alia facilior ac paratior expectanda eſt, aſſumpta ad conſtructionem ſive Parabola, ſive alia quævis linea curva, cùm ſcilicet æquatio ad Biquadraticam aſcendit. Etenim dum hæc ſcribo mihi occurrit regulæ centralis Effectio Geometrica præter omnem ſpem expedita, ac harum rerum Curioſis abundè ſatisfactura.

Deſcripta Parabola NAM, cujus vertex A, Axis ABC ac latus rectum a, reducatur æquatio ad hanc formam $z^4.\ bz^3.\ apzz.\ aaqz.\ a^3r. = o$ vel ad hanc $z^3.\ bzz.\ apz.\ aaq = o$ ſi cubica tantùm fuerit: dein ad diſtantiam BD $= \frac{1}{4}b$ ducatur linea DH Axi parallela, ad ſiniſtram quidem ſi fuerit $-b$, ad dextram ſi $+b$, parabolæ occurrens in puncto D; de quo dimittatur perpendiculum in axem BD. In linea AB continuata verſus B fiat BK $= \frac{1}{2}a$, & ducatur linea DK utrinque interminata. Porrò ſit KC $= 2$ AB in Axe ſemper ultra K continuato; ac ſi habeatur quantitas p ſigno $-$ affecta, verſus eaſdem partes etiam ſumatur CE $= \frac{1}{2}p$, vel in contrarias, ſi habeatur $+p$, ac e puncto E erigatur Axi perpendiculum EF (vel e puncto C ſi defuerit quantitas p) lineæ DK, ſi opus eſt continuatæ, occurrens in puncto F; quod quidem circuli requiſiti centrum eſt, ſi defuerit quantitas q; Aſt ſi habeatur q, ſumenda eſt in FE, ſi opus eſt continuata, linea FG $= \frac{1}{2}q$, ſiniſtrorſum quidem ſi fuerit $+q$, dextrorſum ſi $-q$ collocanda: Et punctum G erit centrum circuli ad conſtructionem propoſitam idonei, ejuſque Radius, ſi defuerit quantitas r, hoc eſt ſi tantùm cubica fuerit, erit linea GD; cujus quadratum in Biquadraticis augen-

Tab. XII. Fig. 4.

dum eſt, ſi fuerit $- r$, vel minuendum ſi $+ r$ additione vel ſubductione rectanguli ſub r & latere recto. Deſcripto ſic circulo, ab interſectionibus ejus cum Parabola demiſſis in lineam DH perpendiculis, quæ ad ſiniſtram ſunt, ut NO, radices æquationis negativas ſemper deſignant, quæ ad dextram ut ML affirmativas.

Aliter ac paulò ſimpliciùs Æquationes cubicæ juxta *Schooteni* Regulam conſtruuntur, quaque etiam radices ad Axem referuntur: quoniam verò ipſe inventor nec modum inveniendi nec demonſtrationem inventi exponit, non abs re erit ejuſdem fundamentum hic adjicere, ſimulatque Effectionem Geometricam concinniorem reddere, atque cautionibus quibus implicatur extricare.

Hæc Regula derivatur ex eo quod omnis æquatio Cubica reduci poſſit ad Biquadraticam, in quâ deficiet terminus ſecundus: Hoc fit ducendo æquationem propoſitam in $z - b = o$, ſi fuerit $+ b$ in æquatione, vel in $z + b = o$. Si fuerit $- b$; & æquatio nova producta eaſdem habebit radices cum Cubica, atque inſuper alteram ipſi $- b$ æqualem, ſi fuerit $- b$ in æquatione; vel contra.

Proponatur conſtruenda $z^3 - z^2 b + apz + aaq = o$.

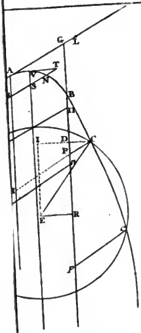
Hæc ducta in $z + b$ fit
$$\begin{aligned} z^4 - z^3 b + apz^2 + aaqz \\ + z^3 b - bbzz + abpz + aaqb. \end{aligned}$$

Hic deficit ſecundus terminus, ac cœfficiens tertii $- bb + ap$ dat $- \frac{bb}{2a} + \frac{1}{2} p$ loco $\frac{1}{2} p$ vel CD in Conſtructione *Carteſii*, & ex Fig. 3.

dimidio cœfficientis termini quarti fit $+ \frac{1}{2} q + \frac{bp}{2a}$ loco $\frac{1}{2} q$ vel DE uſurpanda; adeòque determinatur centrum circuli quæſiti: atque ob datam unam ex radicibus æquationis novæ, viz. $-$ vel $+ b$, dabitur etiam punctum in circumferentia, id eſt Radius ejus. Denique deſcripto circulo, ab interſectionibus ejus cum Parabola demiſſa in Axem perpendicula æquationis radices exhibebunt, affirmativas & negativas, eadem lege ac ſupra.

TAB. XIII. Fig. 1. Inveſtigatur autem centrum Circuli conſtructione per quam facili, cæteriſque omnibus in Cubicis præferenda. Deſcriptæ Parabolæ AMD ſit vertex A, atque Axis AF: ad diſtantiam ipſi b æqualem

Digitized by Google



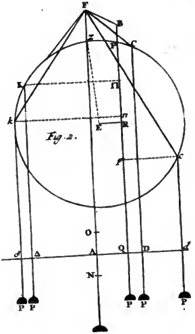
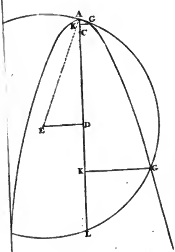


Fig. 2.



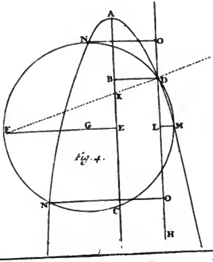


Fig. 4.

Digitized by Google

lem ducatur Axi parallela DK, ad dextram ſi fuerit $+b$ in æquatione, ad ſiniſtram ſi $-b$, quæ Parabolæ occurrat in puncto D. Centris D & A deſcribantur radiis æqualibus arcus occulti utrinque ſeſe interſecantes, ac per ſectionum puncta ducatur linea interminata BC, quæ medio lineæ ſuppoſitæ AD perpendiculariter inſiſtat, & Axi occurrat in puncto E. AbE, infernè quidem ſi in æquatione habeatur $-p$, vel supernè verſus A ſi fuerit $+p$, ponatur $EF = \frac{1}{2}p$; & ex F (vel ex E ſi defuerit p) educatur perpendiculum FG, lineæ BC occurrens in puncto G; & in GF producta fiat $GH = \frac{1}{2}q$, dextrorſum quidem ſi in æquatione habeatur $-q$, aliter ſiniſtrorſum, applicanda: ac punctum H erit centrum quæſitum, HD vero circuli Radius, qui demiſſis in axem perpendiculis ab interſectionibus ſuis cum Parabola, ut LM, Radices omnes, ut prius, commonſtrabit. Quomodò verò conſtructio hæc ex præmiſſis conſequatur, per ſe ſatis evidens eſt, nec opus eſt ut in eâdem demonſtrandâ diutiùs immorer.

Ne in his edendis fruſtraneam navaſſe operam, & ex aliorum inventis gloriolam captare videar, conſulat Lector Cl. *Bakeri* librum Annô 1684. *Londini* editum, & quæ de hoc argumento ſcripſit a *Schooten* in commentario ſuo in Librum III. Geometriæ Carteſianæ. Brevi conceſſo otio tractatulum alium de numero Radicum in hujuſmodi Æquationibus, earumque limitibus, ex contemplatione Conſtructionum præcedentium, aggredi ac in lucem proferre ſtatuo.

DE NUMERO RADICUM

In Æquationibus Solidis ac Biquadraticis, ſive tertiæ ac quartæ poteſtatis, earumque limitibus, tractatulus

Authore E. HALLEY.

Cùm in tractatulo, quem nuper publici juris feci in actis Philoſophicis, Num. 188; Methodum aperuiſſem, quâ Problemata ſolida utcunque affecta minimo negotio, unicâ datâ Parabolâ & Circulo, ſimpliciſſimè conſtrui poſſint; ſub finem mihi ſeſe obtulit contemplatio jucunda ſatis, nempe ex his Conſtructionibus Numerum Radicum in quâvis Æquatione, earumque Limites ac ſigna facilè conſequi ac determinari: quocirca fidem dedi me brevi de hâc materiâ diſſertatiunculam aliquam ſcripturum, in quâ ſi non Principibus, ſaltem ſecundæ claſſis Geometris, me non ingratum nec inutile præſtiturum omninò perſuaſum habui.

Propiùs verò inſpicienti mihi compertum eſt, me imprudentem inter ardua Geometrica illapſum, ac jam iis tractandis deſignatum, quibus olim laboravêre Viri illuſtres *Harriottus* noſtras, ac *Carteſius*; in quibus pari fato utrique Paralogiſmum, (forſan in eorum ſcriptis Geometricis unicum) diverſô tamen modô, admiſêre; uti poſthâc probabitur: ſed *Quandoque bonus dormitat.* Quapropter agnitâ rei tum difficultate tum præſtantiâ, totis viribus incumbere ſtatui, ne promiſſis exequendis impar crederer, ac ne Geometriæ pars tam eximia, támque parùm culta, diutiùs tenebris involuta lateret; ſed ope noſtrâ lucidè his paucis expoſita daretur.

Imprimis verò Lectorem monitum velim, quòd dum his legendis operam dat, oportet prædictam diſſertationem Num. 188. editam, ad manum habere, ac Conſtructiones ibidem traditas probè callere; quia quæ ſequuntur ab illis maximâ ex parte pendent, quas tamen hic repetere vix integrum eſſet.

Ex

Ex *Carteſio* & ex ibi dictis conſtat, tam in Cubicis, quàm in Biquadraticis æquationibus, radices exponi poſſe demittendo perpendicula in Axem, datamve diametrum Parabolæ datæ, ab interſectionibus Curvæ illius cum Circulo. Cumque Circulus Parabolam ſecans, vel in quatuor vel duobus punctis eam interſecare neceſſe eſt, conſtat in Biquadraticis vel duas vel quatuor Radices veras, Affirmativas vel Negativas, ſemper haberi; uti etiam ſi fortè Circulus illam tangat, quô in caſû æqualitas duarum Radicum ejuſdem ſigni concluditur. In Cubicis autem, quoniam una ex interſectionibus ad Conſtructionem requiritur, non niſi una vel tres reliquæ Radices deſignant unam vel tres; uti in Caſu contactus, unde conſtat duas æquales reperiri Radices, Problemáque unde reſultat æquatio reverà planum eſſe.

Cubicæ itaque omnes quomodocunque affectæ unâ vel triplici Radice explicabiles ſunt, utique ſemper poſſibiles, nempe ſi Radices negativas pro veris admiſeris: ſi Biquadraticæ, quarum terminus ultimus r ſigno — affectus eſt, duabus vel quatuor. Aſt ſi habeatur $+ r$ in æquatione, eáque tanta ſit, ut $\sqrt{GDq - ar}$, minor ſit quàm ut Circulus, eo radio ac centro G deſcriptus, Parabolam contingere in aliquo puncto poſſit, æquatio data omninò impoſſibilis eſt, nec ullâ Radice Negativâ vel Affirmativâ explicabilis: Sed de his plura in ſequentibus. Tab. XII. Fig. 4.

Quoniam verò tanta intercedit differentia inter Caſus Cubicarum & Biquadraticarum, ut ſimul comprehendi nequeant; primùm Cubicas deinde alteras tractabimus. Cubicæ verò infinitis Circulis in datâ parabolâ conſtruuntur, Biquadraticæ autem unicô tantùm (ſaltem his Methodis): id adeò quia ponendo $z - e$, ſive indeterminata aliqua, æqualem nihilo, æquatio Cubica reducitur ad Biquadraticam eaſdem Radices cum Cubicâ habentem, atque inſuper aliam ipſi e æqualem; unde fit ut tot Circulis diverſis conſtrui poſſit Cubica, quot imaginari velis quantitates e, id eſt infinitis. Inter has vero Conſtructiones, illa quam ſuperius (§. ult.) dedi longè facillima eſt. Huic tamen non multum cedit alia, quæ ad enucleationem Numeri Radicum, earumque Limitum magis accommodata videtur, quæque ortum trahit ex ablatione ſecundi termini, ponendo

 modò

modo vulgari $x = z +$ vel $-$ tertiâ parte coefficientis termini ſecundi. Hæc autem eſt. Data Parabola ABY ejuſque vertice A, Axe AE & latere recto a, reducatur æquatio ad formam conſuetam, viz. $z^3 . bz^2 . apz . aaq = 0$. Deinde ad diſtantiam $\frac{1}{3} b$ ducatur Axi parallela BK, dextrorſum quidem ſi fuerit $+ b$, aliter ſiniſtrorſum, Parabolæ occurrens in B; ac lineæ ſuppoſitæ AB erigatur perpendicularis utrinque interminata DP, Axi occurrens in puncto G. De B in Axem demitte perpendiculum BC, & ipſi AC fiat GE ſemper æqualis, ac verſus inferiora ponatur. Ab E fiat EH $= \frac{1}{2} p$, ſurſum quidem, ſi in æquatione fuerit $+ p$, deorſum verò ſi $- p$, ac è puncto H (vel ex E ſi defuerit quantitas p) educatur perpendiculum HQ interminatæ DP occurrens in puncto O. Denique in linea HQ interminata, fiat OR $= \frac{1}{2} q$, ab O dextrorſum ſi fuerit $- q$, ſiniſtrorſum ſi $+ q$, collocanda: ac Circulus centro R, radio RA deſcriptus, tot punctis ſecabit Parabolam, quot æquatio propoſita veras habet Radices; eæque erunt perpendicula ZY à punctis interſectionem Y in Axi parallelam BR demiſſa; quarum quæ ad dextram lineæ BK Affirmativæ ſunt, ad ſiniſtram Negativæ.

TAB. XIII. Fig. 2.

Hujus conſtructionis commoditas in eo conſiſtit, quod Circulo per verticem tranſeunte peragitur, perinde ac ſi deſuiſſet ſecundus terminus; ideòque ad Radicum numerum determinandum, ſufficit Loci ſive Lineæ Curvæ proprietates perſpectas habere, quæ ſpatia diſcriminat, ubi ſi ponatur Centrum Circuli qui per Parabolæ verticem tranſeat, circumferentia ejus vel uno vel tribus aliis punctis eam ſecabit; hoc eſt Lineæ curvæ, in quam incidunt centra omnium Circulorum per verticem tranſeuntium ac deinde Parabolam tangentium, naturam definire.

Locus autem ille eſt Parabolois, quam cum *Cl. Walliſio* ſemicubicalem appellare licet, ſive in quâ Cubi applicatarum ad Axem ſunt inter ſe ut Quadrata portionum Axis. Cujus Latus rectum eſt, $\frac{27}{16}$ Lateris Recti datæ Parabolæ, Vertex verò punctum V exiſtente AV dimidium lateris recti ejuſdem Parabolæ. Hoc eſt, ſi ponatur Unitas pro Latere Recto datæ Parabolæ, $\frac{16}{27}$, cubi ordinatim applicatæ æquabuntur Quadrato partis diametri, ſive cubus ex $\frac{2}{3}$ VH qua-

quadrato ex HR, ſi ſcilicet R ſit Centrum Circuli qui per verticem Parabolæ tranſeat, eamque deinde contingat; Hæc eſt Curva illa quam primus mortalium *Nelius* Noſtras rectæ datæ æqualem demonſtravit, eâque occaſione apud Principes Geometras dudum celebris; ejusque proprietates *Cl. Wallisſius* ſub ſinem libri *de Ciſſoide*, *& Hugenius Prop.* 8. & 9. *de Linearum Curvarum Evolutione*, aliique acri ingenio diſquiſivêre, quorum ſcripta conſulat Lector. Hæc Curva utrinque ab Axe Parabolæ deſcripta, viz. VNL, VPX ſpatium complectitur, in quo ſi ponatur Centrum Circuli, qui per verticem A tranſeat, interſecabit ille Parabolam in tribus aliis punctis; ſpatia verò ab Axe remotiora Centra præbent Circulis non niſi uno præter verticem puncto Parabolam ſecantibus.

His probè intellectis jam ad determinandum Radicum Numerum accingimur: Ac primùm deficiat ſecundus terminus; ſitque Latus Rectum 1, vel AV $= \frac{1}{2}$; in conſtructione VH eſt $\frac{1}{2} p$, HR verò $\frac{1}{2} q$; cumque ſi fuerit $+ p$, ab V verſus ſuperiora ponenda ſit $\frac{1}{2} p$, Centrum Circuli extra ſpatium LVX ſemper conſtituitur; ideòque una tantùm Radice explicabilis eſt, Affirmativa ſi $- q$, Negativa ſi $+ q$: quæ quidem Radices *Cardani* Regulis inveſtigantur. Si verò fuerit $- p$, VH $= \frac{1}{2} p$ infernè ponitur, ac fieri poteſt ut HR cadat inter Axem & Curvam VX vel VL, ſi ſcilicet Cubus ex $\frac{2}{3}$ VH, ſive ex $\frac{1}{3} p$, major ſit quàm quadratum ex $\frac{1}{2} q$, ſive $\frac{1}{27} p^3$ major quàm $\frac{1}{4} qq$, quo in caſu tres dantur Radices, duæ Negativæ, ſi fuerit $- q$, ac una Affirmativa earum ſummæ æqualis; vel ſi $+ q$, duæ Affirmativæ unáque Negativa. Quod ſi $\frac{1}{27} p^3$ minor ſit quàm $\frac{1}{4} qq$ una tantùm reperitur Radix, Affirmativa ſi $- q$, Negativa ſi $+ q$. Atque hæc paſſim docentur ab iis qui hanc Geometriæ partem tractarunt.

Jam adſint omnes termini, ac primùm ponatur, e. g. æquatio hæc $z^3 - z^2 b + zp - q = 0$; cui etiam Figuram 2. adaptavimus. In cujus conſtructione BC $= \frac{1}{3} b$, VG $= \frac{1}{2}$ AC $= \frac{1}{18} bb$, VE $\frac{1}{6} bb$, VH $\frac{1}{6} bb - \frac{1}{2} p$, GH $\frac{1}{9} bb - \frac{1}{2} p$ vel $\frac{1}{2} p - \frac{1}{9} bb$, hinc HO $= \frac{1}{27} b^3 - \frac{1}{6} bp$, vel $\frac{1}{6} bp - \frac{1}{27} b^3$, atque HR, ſive diſtantia Centri Circuli R ab Axe, eſt ſemper differentia inter $\frac{1}{6} bp$ & $\frac{1}{27} b^3 + \frac{1}{2} q$; quæ ſi æquantur, Centrum cadit in Axe; ſi $\frac{1}{6} bp$ major

ſit

ſit quam $\frac{1}{27}b^3+\frac{1}{2}q$ ad ſiniſtram Axis, ſin minor ad Dextram. Si itaque Cubi ex $\frac{1}{3}$ V H, (hoc eſt ex $\frac{1}{3}bb-\frac{1}{3}p$ quam nominemus d) Latus Quadratum ſive $\sqrt{ddd}$, majus ſit quàm H R, ſive differentia inter $\frac{1}{27}b^3+\frac{1}{2}q$ & $\frac{1}{6}bp$; reperitur Centrum R intra ſpatium N P V, Paraboloidibus V P X, V N L, ac recta interminata DNP, circumſcriptum: ac proinde Circulus Parabolam ſecabit in tribus punctis Y, Y, Y, ad dextram lineæ B K ſitis, atque adeò æquatio tres habet Radices Affirmativas. Centro verò extra hoc ſpatium N V P conſtituto, non niſi unâ Radice Affirmativâ explicari poteſt. Hic obiter notandum Rectam D P Paraboloidem V P X tangere in puncto P, exiſtente E P $=\frac{1}{27}b^3$; alteram verò V N L ſecare in puncto N, ita ut demiſſo in Axem perpendiculo N F, V F ſit pars quarta ipſius E V, ſive $\frac{1}{12}bb$, N F verò $\frac{1}{108}b^3$. V W autem, quæ è puncto V Axi perpendiculariter erectâ lineæ D P occurrit in W, æqualis eſt $\frac{1}{54}b^3$ ſive $\frac{1}{2}$ E P.

Hinc tutò concluditur, ſi in æquatione vel p major ſit quàm $\frac{1}{3}bb$, vel q major quàm $\frac{1}{27}b^3$, non niſi unam eámque Affirmativam Radicem reperiri; Fallit itaque Regula *Carteſii* (Edit. *Amſt.* 1659. pag. 70.) ubi tot veras dari Radices quot ſunt in æquatione mutationes ſignorum + & — pronunciat, fruſtra etiam in Commentariis ſuis Sphalma hoc excuſante *Schootenio*; Fingi enim poſſunt infinitè plures æquationes præcedentis formulæ tres ſignorum mutationes habentis, quæ unam tantùm quam quæ tres habeant Radices. *Propoſitio etiam quinta ſectionis quintæ Artis Analyticæ Harriotti Noſtri*, uti *Prob.* 18. *Numeroſæ Poteſt. Reſol. Vietæ*, vix ſatis firma eſt, cùm ex Limitationibus quas ibi poſuerunt, toti Parallelogrammo P I V W id conveniat, quod ſoli ſpatio N V P jam competere probavimus, hoc eſt ut centrum præbeat Circulo tribus aliis punctis præter Verticem Parabolam ſecante.

Quantitas autem q, ſive terminus ultimus, datis, b & p eâ lege ut p minor ſit quàm $\frac{1}{3}bb$, accuratè limitatur ex præcedente æquatione $\sqrt{ddd}=\overline{\frac{1}{27}b^3+\frac{1}{2}q}\backsim\frac{1}{6}bp$; cùm ſcilicet Circulus Parabolam contingat. Itaque $\frac{1}{2}q$ minor eſſe debet quàm $\frac{1}{6}bp-\frac{1}{27}b^3+\sqrt{ddd}$; at ſi p major fuerit quàm $\frac{1}{4}bb$, majorem etiam eſſe oportet $\frac{1}{2}q$ quam $\frac{1}{6}bp-\frac{1}{27}b^3-\sqrt{d^3}$, ne cadat centrum in ſpatiolo N V W. Atque

quæ his conditionibus æquatio ſemper triplici Radice explicabilis erit, aliter non niſi una. Semper vero, ſive tres ſive una, Affirmativæ ſunt, ob poſitionem centri R, ad dextram lineæ DP.

Atque hic eſt caſus maximè difficilis, ita ut quicunque præmiſſa bene calleat ſequentia facili negotio intelliget. Detur jam æquatio $z^3 - bz^2 + pz + q = o$. Hic ut tres habeantur Radices, oportet centrum Circuli alicubi intra ſpatium PN△, rectis PN, P△, & curva Paraboloidis N△, definitum, reperiri; quapropter cum EF ſit $= \frac{1}{3}bb$, p minor eſſe debet quàm $\frac{1}{3}bb$: jam ad determinationem quantitatis q, exiſtente $d = \frac{1}{9}bb - \frac{1}{3}p$, ut anteà, $\sqrt{ddd} + \frac{1}{27}bbb - \frac{1}{6}bp$ ſemper major eſſe debet quam $\frac{1}{2}q$, ut conſtituatur Centrum Circuli in ſpatio prædicto PN△: quod cùm ſit æquatio talis duas habet Radices Affirmativas ac unam Negativam. Si verò p major eſt quàm $\frac{1}{3}bb$, vel $\frac{1}{2}q$ major quàm $\sqrt{ddd} + \frac{1}{27}bbb - \frac{1}{6}bp$, non niſi una eaque Negativa Radice explicabilis eſt.

Proponatur jam æquatio $z^3 - bz^2 - pz - q = o$. Ut hæc æquatio tres habeat Radices, oportet centrum Circuli alicubi inveniri in ſpatio indefinito, inter rectam DPD & curvam Paraboloidis PX; hic quantitas p non eſt obnoxia limitationibus, $\frac{1}{2}q$ vero ſemper minor eſſe debet quàm $\sqrt{ddd} - \frac{1}{27}bbb - \frac{1}{6}bp$, poſito $d = \frac{1}{9}bb + \frac{1}{3}p$: Hoc pacto duæ dantur Radices Negativæ, ac una Affirmativa, aliter verò ſi $\frac{1}{2}q$ major ſit quàm $\sqrt{ddd} - \frac{1}{27}bbb - \frac{1}{6}bp$, poſito $d = \frac{1}{9}bb + \frac{1}{3}p$: unicâ tantùm Affirmativâ exponi poteſt. Quarto loco ſit æquatio $z^3 - bz^2 - pz + q = o$, quæ duas Affirmativas habet Radices ac unam Negativam ſi Centrum Circuli reperiatur in ſpatio indefinito inter rectas P△, PD, ad curvam Paraboloidis △I; hoc eſt, (poſito $d = \frac{1}{9}bb + \frac{1}{3}p$) ſi $\frac{1}{2}q$ minor ſit quàm $\sqrt{ddd} + \frac{1}{27}bbb + \frac{1}{6}bp$; ſi verò $\frac{1}{2}q$ major hâc quantitate fuerit, una tantum Negativa ineſt Radix.

Quatuor autem æquationes reliquæ, in quibus habetur $+b$, quoad limitationem Numeri Radicum non differunt à prædictis, ſi ſignum termini ultimi mutetur, ſervato ſigno termini tertii; quæ verò Affirmativæ erunt Radices in illis, hic fiunt Negativæ, & vice verſa.

Oo Sic

Sic in æquatione, $z^3 - bz^2 + pz - q = o$, una vel tres erant Affirmativæ Radices; in hâc verò, $z^3 + bz^3 + pz + q = o$, vel una vel tres Negativæ ſunt, ſub iiſdem conditionibus; nulla verò omnino Affirmativa Sic in $z^3 + bz^2 + pz - q = o$, duæ ſunt Negativæ & una Affirmativa, ſi p minor ſit quam $\frac{1}{3}bb$, ac $\frac{1}{2}q$ minor quam $\sqrt{d^3} + \frac{1}{27}b^3 - \frac{1}{6}bp$, quemadmodum in $z^3 - bz^2 + pz + q = o$, duæ erant Affirmativæ & una Negativa; excedentibus autem leges præſcriptas p vel q, una tantùm hic eſt Radix Affirmativa, quæ ibi Negativa erat. Pari modo in $z^3 + bz^2 - pz + q = o$, vel duæ ſunt Affirmativæ ac una Negativa, vel una Negativa tantum, deniquc iiſdem de cauſis in æquatione $z^3 + bz^2 - pz - q$ duæ ſunt Negativæ & una Affirmativa, vel una Affirmativa tantùm, quibus in æquatione $z^3 - bz^2 - pz + q$, duæ erant Affirmativæ & una Negativa, vel una Negativa tantùm, nempè prout $\frac{1}{2}q$ major vel minor fuerit quàm $\sqrt{d^3} + \frac{1}{27}b^3 + \frac{1}{6}bp$.

Si deſuerit terminus tertius, ſive pz, Centrum R ſemper cadit in linea IPEΔ, quocircà ſi fuerit $z^3 - bz^2. *. - q$, vel $z^3 + bz^2. *. + q$, una tantùm eſſe poteſt Radix, ſi $-b$ Affirmativa, ſi $+b$ Negativa. At ſi fuerit $z^3 - bz^2. *. + q$, vel $z^3 + bz^2. *. - q$, duæ poſſunt eſſe Affirmativæ ac una Negativa in priore, vel una Affirmativa & duæ Negativæ in poſteriore, cadente Centro in linea PΔ inter P ac Δ, hoc eſt ſi $\frac{1}{2}q$ minor ſit quàm $\frac{1}{27}b^3$; Sin major fuerit, una tantùm Negativa in priore, vel una Affirmativa in poſteriore, dari poteſt.

Hactenus Numerum Radicum in Cubicis æquationibus pleniùs aſſequuti ſumus, reſtat ut nonnulla adjiciam de Quantitate Radicum, Hic primùm notandum quod omnis æquatio tres habens Radices ope Tabulæ Sinuum, Triſectione ſcilicet Anguli, ſatis expeditè reſolvi poſſit; Ponendo ſcil. $\sqrt{\frac{4}{9}bb - \frac{4}{3}p}$, vel $\sqrt{4d}$, ſi fuerit $+p$ in æquatione, vel $\sqrt{\frac{4}{9}bb + \frac{4}{3}p}$, ſi $-p$, pro Radio Circuli; Angulum verò triſecandum qui ſinum habeat in Tabula Sinuum $\frac{\frac{1}{27}b^3 + \frac{1}{6}bp + \frac{1}{2}q}{\sqrt{d^3}}$. Invento hoc angulo, ſinus tertiæ partis ejus, ut

&c

& Sinus tertiæ partis compl. ad Semicirculum, eorumque ſumma, ex Tabula Sinuum dabuntur. Hi verò Sinus in Radium $\sqrt{\frac{4}{9}bb+\frac{4}{3}p}$ ducendi ſunt, & habebuntur Quantitates (Y &, Y &, Y &, in Fig.) quarum & $\frac{1}{3}b$ vel ſumma vel differentia, prout caſus poſtulat, veras Radices Æquationis exhibebunt. Hæc omnia ex inventis *Carteſii* derivantur: Ut verò caſus omnes, quantum fieri poſſit, breviter complectar, dico quod Centro R, in prima æquationum formula, cadente in ſpatio VGP, Sectiones duæ Y, Y, cadunt inter A & B, ac proinde utraque ex Minoribus Radicibus Minor eſt quam $\frac{1}{3}b$, tertia autem & Major ſemper ſuperat $\frac{1}{3}b$, ſuperatur verò à b. Quòd ſi cadat in ſpatio GNV, duæ majores ſunt quam $\frac{1}{3}b$, minores verò quàm $\frac{1}{2}b$, tertia verò eſt b — duabus alteris, ac proinde minor quàm $\frac{1}{3}b$: Sed adhibitâ Limitatione Quantitatis p, arctioribus terminis Radices includuntur. Maxima enim Radix minor eſt quàm $\sqrt{\frac{4}{9}bb-\frac{4}{3}p}+\frac{1}{3}b$, major verò quàm $\sqrt{\frac{1}{4}bb-p}+\frac{1}{2}b$; at cùm $\frac{1}{4}bb$ minor eſt quàm p, limes ille fit $\sqrt{\frac{1}{9}bb-\frac{1}{3}p}+\frac{1}{3}b$; Radix media ſemper minor eſt quàm $\sqrt{\frac{1}{4}bb-p}+\frac{1}{2}b$; major verò quam $\frac{1}{3}b-\sqrt{\frac{1}{9}bb-\frac{1}{3}p}$; hunc verò limitem nunquam excedit Radix Minima, ſed cum Quantitate q evaneſcit.

In ſecunda formula præſcriptis Legibus duæ ſunt Affirmativæ ac una Negativa, ac cadente centro in ſpatio GPE, altera ex Affirmativis major eſt, altera minor quàm $\frac{1}{3}b$, Major verò non excedit b, Negativa autem Major non eſſe poteſt quam $\sqrt{\frac{4}{3}bb}-\frac{1}{3}b$, eſt autem differentia ipſius b & ſummæ Affirmativarum. Centro autem in ſpatio EGN∆ poſito, utraque Affirmativa Major eſt quàm $\frac{1}{3}b$, minor verò quàm $\sqrt{\frac{1}{3}bb}+\frac{1}{3}b$, Negativa verò ſemper minor eſt quàm $\frac{1}{3}b$. Limites autem propiores ex data p evadunt. Radicis quidem maximæ Affirmativæ $\sqrt{\frac{1}{4}bb-p}+\frac{1}{2}b$, qua ſemper minor eſt, ut & major quàm $\sqrt{\frac{1}{9}bb-\frac{1}{3}p}+\frac{1}{3}b$; hoc tamen limite minor eſt altera Affirmativa, quæ cum quantitate q minuitur. Nega-

tiva verò ſemper minor eſt quàm $\sqrt{\frac{1}{9}bb - \frac{1}{3}p} - \frac{1}{3}b$, ac deficiente quantitate q evaneſcit.

In tertiâ formulâ duæ Negativæ ſunt ac una Affirmativa: in hac, ut & in quarta, Radices non limitantur à quantitate b, Affirmativa verò ſemper minor eſt quàm $\sqrt{\frac{1}{9}bb + \frac{1}{3}p} + \frac{1}{3}b$, major tamen quam $\sqrt{p + \frac{1}{4}bb} + \frac{1}{2}b$: Maxima verò ex Negativis ſemper major eſt quàm $\sqrt{\frac{1}{9}bb + \frac{1}{3}p} - \frac{1}{3}b$, minor verò quàm $\sqrt{p + \frac{1}{4}bb} - \frac{1}{2}b$. Minor autem ex Negativis ſemper minuitur cum minuta quantitate q.

In quarta formula cadente Centro intra ſpatium L△PD; ſi duæ ſint Affirmativæ ac una Negativa, Maxima ex Affirmativis Major eſſe nequit quàm $\sqrt{p + \frac{1}{4}bb} + \frac{1}{2}b$, nec minor quàm $\sqrt{\frac{1}{9}bb + \frac{1}{3}p} + \frac{1}{3}b$; Minor verò Radix ab hoc Limite minuitur, minuta quantitate q. Negativa autem minor eſt quàm $\sqrt{\frac{1}{9}bb + \frac{1}{3}p} - \frac{1}{3}b$; major verò quàm $\sqrt{p + \frac{1}{4}bb} - \frac{1}{2}b$.

Notandum verò hic Radices Negativas ubique ſigno Affirmativo notari, quia hæ ſunt Radices Affirmativæ quatuor æquationum illarum, in quibus habetur $+ b$, ac q ſigno contrario notatur; ut ſupra monui. Horum omnium demonſtratio ex eo conſequitur, quod ubicunque Centrum Circuli R incidit in lineas curvas VPX, vel V△L, circumferentia ejus Parabolam tangit in puncto, cujus diſtantia ab Axe eſt $\sqrt{\frac{1}{3}}$ VH, eámque ſecat ex alterâ Axis parte, ad diſtantiam $2\sqrt{\frac{1}{3}}$ VH; cùm verò Centrum cadit in Lineam DPD, altera ex Radicibus fit $= 0$, ac proinde Cubica reducitur ad Quadraticam, ſive ad $z^2 - bz + p = 0$, cujus Radices Limites deſignant ubi evaneſcit quantitas q: ac quo minor eſt q, eò propiùs ad has limites accedunt Radices. Quadratica eſt etiam cum Centrum cadit in Axe; hoc eſt, cùm $\frac{1}{2}q = \frac{1}{6}bp - \frac{1}{27}b^3$, in primâ formulâ; vel $\frac{1}{2}q = \frac{1}{27}b^3 - \frac{1}{6}bp$. in ſecundâ; in tertiâ impoſſibile eſt; at in quartâ cùm $\frac{1}{2}q = \frac{1}{27}b^3 + \frac{1}{6}bp$; quô in caſu minor ex Radicibus Affirmativis eſt , b, major $\sqrt{\frac{1}{4}bb + p} + \frac{1}{2}b$; Negativa verò

V.

$\sqrt{\frac{1}{4}bb+p}-\frac{1}{2}b$. In primâ Radices ſunt $\frac{1}{2}b$, & $\frac{1}{2}b \pm \sqrt{\frac{1}{4}bb-p}$. In ſecundâ verò formulâ, $\frac{1}{2}b$, & $\sqrt{\frac{1}{4}bb-p}+\frac{1}{2}b$, ſunt Affirmativæ: Negativa autem $\sqrt{\frac{1}{4}bb-p}-\frac{1}{2}b$.

Atque hæc in Cubicis ſufficere poſſe videntur; ob eximium verò Uſum Methodi, quâ ope Tabulæ Sinuum Radices harum æquationum inveniuntur, placuit unum vel alterum Exemplum adjungere, ut Praxis illius compendium inde innoteſcat. Proponatur Æquatio $z^3 - 39z^2 + 479z - 1881 = 0$; quæruntur Radices z. $\sqrt{\frac{1}{9}bb-\frac{1}{3}p} = \sqrt{9\frac{1}{3}} = \sqrt{d}$, cujus duplum $\sqrt{37\frac{1}{3}}$ Radius eſt Circuli; & $\dfrac{\frac{1}{27}b^3+\frac{1}{2}q-\frac{1}{6}bp}{\sqrt{d^3}} = \dfrac{2197+940\frac{1}{2}-3113\frac{1}{2}}{9\frac{1}{3}\sqrt{9\frac{1}{3}}}$,

ſive $\dfrac{24}{9\frac{1}{3}\sqrt{9\frac{1}{3}}}$ eſt ſinus Tabularis Anguli, hoc eſt, factâ diviſione ope Logarithmorum, Log. 9,9251560, cui reſpondet Angulus 57 *gr.* 19 *m.* 11 $\frac{1}{2}$ *s.* Hujus tertia pars 19 *gr.* 6 *m.* 24 *s.* & complementi 40 *gr.* 53 *m.* 36 *s.* ſinus dant Log. 9.514983, & 9.816011, qui ducti in Rad. $\sqrt{37\frac{1}{3}}$ producunt Y &, & Y &, Log. 0.301030. = 2, & Log. 0.601059 = 4, tertia vero Y &, æqualis eſt eorum ſummæ ſive 6. Ideòque Radices ſunt $13-4=9$, $13-2=11$, & $13+6=19$, ex quibus ſingulis conflatur prædicta æquatio. Ubi Notandum duas Minores Radices non excedere $\frac{1}{3}b$ vel 13, quia centrum R in conſtructione cadit ad Dextram Axis, id eſt $\frac{1}{6}bp$ minor eſt quam $\frac{1}{27}b^3+\frac{1}{2}q$.

Exemplum alterum ſit $x^3 - 15x^2 - 229x - 525 = 0$, & quærantur Radices. $\sqrt{\frac{1}{9}bb+\frac{1}{3}p} = \sqrt{101\frac{1}{3}} = \sqrt{d}$, & Radius Circuli $\sqrt{405\frac{1}{3}}$. $\dfrac{\frac{1}{27}b^3+\frac{1}{6}bp+\frac{1}{2}q}{\sqrt{d^3}} = \dfrac{125+572\frac{1}{2}+262\frac{1}{2}}{101\frac{1}{3}\sqrt{101\frac{1}{3}}} =$

$\dfrac{960}{101\frac{1}{3}\sqrt{101\frac{1}{3}}}$ = Sinui Tabulari Arcus, cujus Log. 9.9736426, & Arcus ipſe 70 *gr.* 14 *m.* 22 *s.* hujus pars tertia eſt 23 *gr.* 24 *m.* 47$\frac{1}{3}$ *s.* & Complementi 36 *gr.* 35 *m.* 12$\frac{2}{3}$ *s*; quorum ſinus Log. ſunt 9.599183, & 9.775275, quibus addito Log. $\sqrt{405\frac{1}{3}}$ fiunt Log. 0.903080 = 8, & Log. 1.079181 = 12, & eorum ſumma = 20. Hinc concluditur $20+\frac{1}{3}b$, vel 25, æquari Radici Affirmativæ, &

Digitized by Google

8 & 12 — $\frac{1}{3}b$, ſive 3 & 7, Negativis. Quod ſi æquatio fuiſſet $x^3 + 15x^2 - 229x + 525 = 0$, 3 & 7 fuiſſent Affirmativæ; 25 verò Negativa. Cæteræ autem Cubicæ unicâ tantùm Radice explicabiles juxta Regulas *Cardani* reſolvendæ ſunt, poſtquàm demptus fuerit ſecundus terminus; nec video quô pactò minori calculo hoc negotium peragi poſſit. At ſi deſideretur Radix hæc in Quantitatibus b, p, q, expreſſa, dico eam eſſe in primâ formulâ, $\frac{1}{3}b$ + vel — Summa vel differentia Radicum Cubicarum ex $\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{108}p^2b^2 + \frac{1}{27}b^3q - \frac{1}{6}bpq + \frac{1}{27}p^3} \pm \frac{1}{27}b^3 + \frac{1}{2}q - \frac{1}{6}bp$: viz. +, ſi $\frac{1}{27}b^3 + \frac{1}{2}q$ major ſit quàm $\frac{1}{6}bb$, aliter —; ſumma vero quoties $\frac{1}{3}bb$ major eſt quam p; ſin minor fuerit $\frac{1}{3}bb$, differentia. Inque cæteris formulis Radix ſemper conflatur ex iiſdem elementis, variatis tamen ſignis + & —, ut facilè percipiet qui velit experiri.

Ope verò Tabulæ Logarithmicæ ſinuum Verſorum Radices hæ ſatis promptè inveniuntur; nempe ſi coefficientes Numeri ſint ſurdi vel fracti, ac Radices Numeris ineffabiles; ut plerumque fit. Hæc autem eſt Regula: in primâ ac ſecundâ formulâ, ſi $\frac{1}{3}bb$ minor ſit quàm p; ſit $\frac{1}{3}p - \frac{1}{9}bb = d$, & poſita differentia inter $\frac{1}{6}bp$ & $\frac{1}{27}b^3 + \frac{1}{2}q$, hoc eſt HR, in prima, ac inter $\frac{1}{6}bp + \frac{1}{2}q$ & $\frac{1}{27}b^3$, in ſecundâ, pro Radio; inveniatur Angulus cujus Tangens eſt $d\sqrt{d}$. Deinde ut Co-Sinus hujus Anguli, ad ejuſdem ſinum verſum: Ita differentia pro Radio habita, ad quartum; cujus Latus Cubicum triſecando Logarithmum habebitur: ac diviſo $\frac{1}{3}p - \frac{1}{9}bb$ per hoc Latus Cub. è Quoto ſubducatur Diviſor, Reſiduum erit quantitas Y & : Hujus Reſidui ac $\frac{1}{3}b$ ſumma, ſi centrum cadit ad dextram Axis, aliter differentia earundem, Radix erit quæſita. Quod ſi $\frac{1}{3}bb$ major ſit quàm p, poſito HR pro Radio, ſit $d\sqrt{d}$, ſive diſtantia Paraboloidis ab Axe, ſinus Arcus cujuſdam; Hujus ſinus verſus ducatur in Radium, ſive $\frac{1}{6}bp - \frac{1}{27}b^3 \pm \frac{1}{2}q$, ac triſecto producti Logarithmo, habebitur ejus Latus Cubicum, per quod dividatur $\frac{1}{9}bb - \frac{1}{3}p$. Dico Quoti ac Diviſoris ſummam eâdem Lege additam vel ablatam ex $\frac{1}{3}b$, Radicem quæſitam exhibere. Ac par eſt Ratio in tertiâ ac quartâ formulis, niſi quod $\frac{1}{27}b^3 + \frac{1}{6}bp \pm \frac{1}{2}q$ pro Radio aſſumenda eſt, ac $\frac{1}{9}bb + \frac{1}{3}p$ in $\sqrt{\frac{1}{9}bb + \frac{1}{3}p}$ ſive $d\sqrt{d}$ pro ſinu: Sed hæc præcepta exemplis fortaſſe meliùs percipientur.

Sit

Sit æquatio Cubica, $zzz - 17zz + 54z - 350$, ac quæratur Radix z: Hic $\frac{1}{3}bb$ major eſt quàm p, ſed q major eſt quàm Cubus ex $\frac{1}{3}b$, ideoque unâ tantùm Affirmativâ Radice explicabilis eſt. Jam $\frac{289}{9} - \frac{54}{3}$ eſt d, ac $\frac{127}{9}\sqrt{\frac{127}{9}}$ pro ſinu habenda eſt, ad Radium $\frac{4913}{27} + 175 - 153$, hoſt eſt $\frac{5507}{27}$: Arcus verò competens fit 15 *gr.* 3 *m.* 49 *s.* Hujus ſinus verſi Log. 8. 5362376, additus Log. Radii 2. 3095913, dat 0. 8457889, cujus tertia pars 0. 2819276 eſt Log. Radicis Cubicæ 1, 91394, quo Diviſore diviſo, $\frac{127}{9}$ ſive d, fit Quotus 7. 37281; Quoti ac Diviſoris ſumma, auctâ additione $\frac{1}{3}b$, fit Radix quæſita, nempe 14. 9534, &c.

Exactis Cubicis Biquadraticas jam aggrediamur. Hæ ſemper vel nullam, vel duas, vel quatuor Radices veras habent, quarum determinatio, partim à Coefficientibus, partim à ſigno & magnitudine numeri abſoluti dati, pendet. Harum omnium conſtructionem generalem ſuperius (*pag.* 279.) ſatis concinnam podidi, quam lector jam vidiſſe ſupponitur. In conſtructione æquationis $z^4 - bz^3 + pzz - qz + r = 0$, fit $BD = \frac{1}{4}b$, $AB = \frac{1}{16}bb$, $BK = \frac{1}{2}$, ſive dimidio Lateris recti, $KC = 2\,AB = \frac{1}{8}bb$, $KE = \frac{1}{8}bb - \frac{1}{2}p$, $AE - \frac{1}{2} = \frac{3}{16}bb - \frac{1}{2}p$, $FE = \frac{1}{16}b^3 - \frac{1}{4}bp$, ac $EG = \frac{1}{16}b^3 - \frac{1}{4}bp + \frac{1}{2}q$; quo factô Circulus, Centro G, Radio $\sqrt{GD^2 - r}$, interſecabit Parabolam vel nullo, duobus, aut quatuor punctis, quæ perpendiculis in lineam HD Radices omnes z exhibent. Ut autem quatuor ſint, evidens eſt Centrum Circuli alicubi conſtitui debere intra ſpatium, de cujus puncto quôvis tria perpendicula in Curvam Parabolæ demitti poſſint; atque ſimul Radium minorem eſſe maximo ex illis perpendiculis majorem vero medio. Quòd ſi Centrum conſtituatur extra hoc ſpatium, ut non niſi una perpendicularis in Parabolam demitti poſſit, qua major ſit Radius; vel ſi minor ſit media ex tribus perpendicularibus, major verò quàm minima ex illis, duæ tantùm poſſunt eſſe Radices; nulla verò omninò datur, quoties Radius $\sqrt{GD^2 - r}$, minor eſt minima ex tribus, vel una illa, quoties

Tab. XIII. Fig. 3.

Digitized by Google

ties una tantùm eſt. Jam quale ſpatium hoc ſit, quibusque limitibus diſcernitur, ac quibus conditionibus Radius Circuli minor vel major ſit prædictis perpendicularibus, nobis reſtat inquirendum; ac primùm quô pactô perpendicularis in Parabolam demitti poſſit oſtendendum eſt.

Tab. XIII. Fig. 4. Sit ABC Parabola, AE Axis ejus, AV ſemi Latus Rectum; G punctum de quô demittenda eſt perpendicularis. Ducatur Axi perpendicularis GE, ac biſecetur VE in F, & erecta perpendiculari FH ad idem Axis latus, fiat $FH = \frac{1}{4} GE$; dico quod Circulus, Centro H, Radio HA deſcriptus, Parabolam interſecabit in punctis tribus, vel uno, Z; ad quæ ductæ rectæ GZ curvæ Parabolicæ perpendiculariter inſiſtunt.

Fig. 2. Ut autem tres ſint hujusmodi interſectiones, oportet Centrum Circuli H ita collocari, ut ſit intra ſpatium Paraboloïdibus incluſum; hoc eſt ut FH minor ſit quàm $\sqrt{\frac{4}{27} VF^3}$, ſive FH^2 minus quàm cubus ex $\frac{1}{3}$ VF: atque adeò $GE = 4 FG$, minor erit quam $4\sqrt{\frac{4}{27} VF^3}$, ſive $4\sqrt{\frac{1}{54} VE^3}$, hoc eſt Quadratum ex GE minus erit quàm $\frac{8}{27} VE^3$. Coincidunt itaque hi Limites cum Paraboloïdibus duabus ejusdem generis cum iis quibus in Cubicis uſi ſumus, ſed quarum Latus Rectum duplo minor eſt; viz. $\frac{27}{32}$ Lateris Recti Parabolæ, hoc eſt $\frac{27}{16}$ ipſius AV: ideoque ea ipſa eſt linea Curva cujus Evolutione generatur Parabola, ſic demonſtrante *Hugenio*; quamque ſemper contingit linea

Fig. 3. DF, quæ Parabolæ perpendiculariter inſiſtit in puncto D. Punctum autem P, ſive in quo contingit recta DF Paraboloïdem, Centrum eſt Circuli, qui Radio DP deſcriptus cum Parabola in puncto D coincidit, ſive ejusdem Curvitatis eſt; ut per ſe ſatis conſtat.

Deſcriptis itaque hujusmodi Paraboloïdibus VXP, VNΔ, utrinque ab Axe; perſpicuum eſt quod, niſi Centrum Circuli conſtituatur intra hos limites, non poſſit ille pluribus quàm duobus in punctis Parabolam interſecare: unde determinare licet quibus ſub conditionibus Coefficientes terminorum intermediorum coercentur, in æquationibus Biquadraticis, ut habeantur quatuor Radices. Ac prima fronte clarum eſt p majorem eſſe non poſſe quàm $\frac{1}{3} bb$, (ſcil in formulis ubi habetur $+ p$) nec q quàm $\frac{1}{16} b^3$. Generaliter vero

rò

rò $\frac{1}{16}b^3 \mp \frac{1}{4}pb \mp \frac{1}{2}q$, id eſt diſtantia Centri ab Axe E G, minor eſſe debet quàm $EH = 4\sqrt{\frac{1}{27}VE^3}$, hoc eſt (ob $VE = \frac{3}{16}bb \mp \frac{1}{2}p$) quam $\frac{1}{4}bb \mp \frac{2}{3}p\sqrt{\frac{1}{16}bb \mp \frac{1}{6}p}$; ſignis + & — in dubio relictis, ut ſecundum æquationis cujusvis naturam variari poſſint; quemadmodum in Cubicis ſuperius oſtenſum eſt.

Termini autem ultimi r limitatio eadem facilitate inveniri nequit; id adeò, quia Problema eſt ſolidum, in Curvam Parabolæ demittere perpendicularem, quodque non ſine ſolutione æquationis Cubicæ reſolvi poteſt. Itaque primo loco deficiat ſecundus terminus, vel ſi adfuerit tollatur, ut æquatio habeat formulam, $z^4 . * . pz^2 . qz . r . = 0$. Ac ſi fuerit $-r$, ſemper duabus vel quatuor Radicibus explicari poteſt; ut autem quatuor ſint, oportet Centrum Circuli intra Paraboloïdes prædictas conſtitui, ſive ut ſit $-p$, ac qq minus quám $\frac{4}{27}p^3$, ſive cubo ex $\frac{1}{3}p$. Deinde habeantur Radices æquationis hujus $y^3 . * . \frac{1}{2}py . \frac{1}{4}q = 0$, quantitatibus p & q iiſdem ſignis annexis quibus in Biquadratica. Hæ autem Radices auxilio Tabulæ ſinuum ſatis expeditè inveniuntur. Inventis autem tribus illis y, (quæ ſunt ordinatim applicatæ ad Axem Parabolæ, de punctis ubi incidunt perpendicula in Curvam ejus ſcil. ZY *Fig.* 4.) $pyy - 3y^4$. ex minore y, quantitatem maximam r deſignabit, ſi fuerit $-r$; qua ſi minor fuerit r, æquatio quatuor habebit Radices, aliter duas. Aſt ſi fuerit $+r$, oportebit eam minorem eſſe quàm $3y^4 - pyy$ ex media y, nam ſi major ſit, non niſi duas habere poteſt Radices, ſaltem ſi minor ſit r, quàm $3y^4 - pyy$ ex minima y. Hac verò ſi major ſit, nulla omninò Radice vera explicabilis eſt æquatio. Hi verò iidem limites aliter deſignantur ex quantitate q, ſcil. $\frac{3}{4}qy - y^4$ in primo caſu, $y^4 - \frac{3}{4}qy$ in ſecundo, ac $y^4 + \frac{3}{4}qy$ in tertio.

Fieri autem poteſt ut duæ minores quantitates y non longè diſtent ab invicem, unde evenit quod utraque ex perpendicularibus major ſit quàm recta G A, ſcil. cum qq majus ſit quàm $\frac{1}{27}p^3$, minus verò quàm $\frac{4}{27}p^3$; cadente centro intra ſpatium Paraboloïdibus (utriusque Figuræ 2 & 3) interjectum. Hoc in caſu, ſi fuerit $+r$, non niſi duæ poſſunt eſſe Radices, exiſtente $y^4 + \frac{3}{4}qy$ ex maximâ y, major quàm r; aliter nulla. At ſi $\frac{3}{4}qy - y^4$ ex minimâ y, major fuerit quàm r ſigno — notata, r verò major quàm $\frac{3}{4}qy - y^4$ ex media y, tunc ha-

Pp ben-

bentur quatuor Radices; at duæ tantùm, ſi vel major priore vel minor poſteriore inventa ſit r.

Si verò in æquatione fuerit $+ p$, vel ſi ſit $- p$ & qq majus fuerit quàm $\frac{4}{27} p^3$, æquatio $y^3 . * . \frac{1}{2} py . \frac{1}{4} q$, unicâ tantùm explicatur Radice y; hoc eſt, una tantùm perpendicularis de Centro Circuli demitti poteſt: unde certò concluduntur duas tantum Radices haberi poſſe in æquatione data, quarum ſumma, ſi fuerit $- r$, cum quantitati r augetur; at ſi habeatur $+ r$, obtenta quantitate y, quantitas illa r minor eſſe debet quàm $y^4 + \frac{1}{2} qy$; nam ſi ea major ſit, æquatio propoſita abſurda & impoſſibilis eſt.

Longum & ſuperfluum eſſet omnes hujus ſenſus æquationes percurrere, cùm ex jam dictis attendenti ſatis evidens ſit, quæ Negativæ quæ Affirmativæ ſint; atque, quod Radicum harum Limites ex quantitatibus inventis y petantur. In exemplum verò, quod cuivis in cæteris imitari licet, proponantur indagandi Limites ſive Conditiones ſub quibus in Æquatione Biquadratica 4. Radices Affirmativæ dari poſſint. Hoc autem fit quoties Centrum Circuli G, ponitur in ſpatio V P K (*Fig.* 3.), ac ſimul habetur $+ r$, ſive Circuli Radius minor quàm G D: Unde patet, æquationem de quâ agitur hujus eſſe formulæ, $z^4 - bz^3 + pz^2 - qz + r = 0$; p verò majorem eſſe non poſſe quàm $\frac{3}{8} bb$, nec $\frac{1}{4} pb$, hoc in caſu, quàm $\frac{1}{16} b^3 + \frac{1}{2} q$; deinde opus eſt ut $\frac{3}{4} bb - \frac{2}{3} p$ in $\sqrt{\frac{1}{12} bb - \frac{1}{3} p}$ major ſit quàm $\frac{1}{16} b^3 + \frac{1}{2} q - \frac{1}{4} pb$; & ex his Limitibus certò conſtabit Centrum intra ſpatium V P K inveniri. Ut verò definiatur quantitas r, ſolvenda primùm eſt Cubica, $y^3 . * . - \overline{\frac{3}{16} b^2 - \frac{1}{2} p}\, y = \frac{1}{32} b^3 + \frac{1}{4} q - \frac{1}{8} pb$; & habebuntur puncta, in quæ perpendiculares de Centro in Curvam Parabolæ cadunt.

Inventis autem tribus valoribus hujus y, r minor eſſe debet quam $\frac{3}{256} b^4 + \frac{1}{4} bq - \frac{1}{16} bbp + 3y^4 - \frac{1}{8} b^2 yy + pyy$ ex media y, major verò quàm $\frac{3}{256} b^4 + \frac{1}{4} bq - \frac{1}{16} bbp + 3y^4 - \frac{1}{8} b^2 yy + pyy$ ex minima y. Hos verò Limites ſi excedat r, non niſi duæ Radices haberi poſſunt. Denique ſi $\frac{3}{256} b^4 + \frac{1}{4} bq - \frac{1}{16} bbp + 3y^4 - \frac{1}{8} bbyy, + pyy$ ex maximâ y, minor fuerit quàm r, æquatio propoſita impoſſibilis eſt.

Accidit etiam ut quatuor ſint Affirmativæ, cum Centrum G conſti-

ſtituitur in ſpatiolo VTS, ducta ſcil. RTS perpendiculari in medium ſuppoſitæ lineæ AD: hoc autem fit cum p major eſt quàm $\frac{3}{8}bb$, ac $\frac{1}{4}bb - \frac{2}{3}p\sqrt{\frac{3}{18}bb - \frac{1}{18}p}$ major quàm $\frac{1}{2}pb - \frac{1}{16}bbb - \frac{1}{2}q$. Quo in caſu ſemper duæ, aliquando tres, ex Radicibus fiunt majores quàm $\frac{1}{4}b$.

Notandum verò hic limitem illum ex minima y productum, aliquando negativum fieri, ſive minorem nihilo; quoties ſc maxima ex tribus perpendicularibus major eſt quàm GD (*Fig.* 3). Hoc, ſi acciderit quantitas $+ r$, a Limite præſcripto ex media y, in nihilum minui poteſt. Defectus verò Limitis ex minima y monſtrat quanta poſſit eſſe $- r$ in æquatione, ſi habeantur tres Radices Affirmativæ ac una Negativa; quam ſi excedat, non niſi duæ, altera Affirmativa, altera Negativa, dari poſſunt. Hæc autem omnia demonſtrantur ex eo quod prædicti Limites quantitatis r, ſint differentiæ Quadratorum lineæ GD & perpendicularium in Curvam Parabolæ.

Ob perplexas verò cautiones, quas parit in æquationibus hiſce ſignorum diverſitas, præſtat ſemper ſecundum terminum tollere, ac deinde juxta præcepta jam tradita Radicum numerum ac ſigna inquirere; præſertim ſi quantitates illæ y non multùm diſtent ab invicem. Ex quatuor autem hiſce Radicibus Affirmativis, duæ ſemper ſunt minores quam $\frac{1}{4}b$, duæ verò majores; nempe ſi DG, minor ſit quàm AG, ſive $\frac{1}{4}pb$ quàm $\frac{1}{32}b^3 + q$. Tres autem minores ſunt quam $\frac{1}{4}b$ quoties perpendicularis media, ſive ex media y inventa, major eſt quàm AG, ſive $\frac{1}{4}bby$ major quam $3y^3 - pyy$ ex eâdem media y; Quarta verò & maxima Radix major eſt quàm maxima $y + \frac{1}{4}b$; æquatur autem differentiæ ipſius b & ſummæ cæterarum trium Radicum, ideoque minor eſt b. Sed jam *Manum de Tabula*; Fortaſſis illi qui naturam Parabolæ penitius perſpectam habent, majori compendio hæc omnia peragere valebunt; at ſi quantitates hæ omnes $b. p. q.$ & r, abſque reſolutione Cubicæ æquationis ritè determinari poſſint, non ſine cauſâ ambigitur; quæcunque enim æquationibus planis hac in re fiunt, non veros Limites, ſed Approximationes tantùm exhibent.

EPISTOLA DOMINI
COLIN MAC LAURIN

Matheſeos Profeſſoris in Accademia Edimburgenſi,

& R. S. S.

DATA

D^no^. MARTINO FOLKES, R. S. V. P^r^.

De Æquationibus, in quibus dantur Radices impoſſibiles.

PRæterita Hyeme ad te ſcripſi me cogitaſſe de facillima & ſimpliciſſima Methodo demonſtrandi NEWTONI Regulam, qua ſæpe cognoſcitur num Æquatio aliqua habeat Radices impoſſibiles, nec ne: Quæ Methodus ſpero fore ut non deſpliceat, cum communi tantum nitetur Algebra, fundeturque obviis Quantitatum proprietatibus, quæ ſequentibus Lemmatibus demonſtrantur, nec opus habeat Curvarum conſideratione, quod non ita convenire videtur ſubjecto mere Algebraico.

Lemma I. *Summa Quadratorum duarum Quantitatum realium ſemper major eſt duplo earundem Producto.* Sic $a^2 + b^2$ majus eſt quam $2ab$; nam eorum differentia $a^2 + b^2 - 2ab = \overline{a-b}^2$, idcirco poſitiva; cum ſit ſemper poſitivum Quadratum cujusvis Quantitatis, ſive poſitivæ, ſive negativæ.

Lemma II. *Summa Quadratorum trium Quantitatum realium, ſemper major eſt quam ſumma Productorum, quæ fiunt multiplicando binas illas Quantitates inter ſe.* Sic $a^2 + b^2 + c^2$ majus ſemper eſt quam $ab + ac + bc$: patet enim quod $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc =$

$$\frac{2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc}{2} = \frac{aa - 2ab + bb + aa - 2ac + cc + bb - 2bc + cc}{2} = \frac{\overline{a-b}^2 + \overline{a-c}^2 + \overline{b-c}^2}{2},$$

id eſt ſemiſummæ Quadratorum differentiarum Quantitatum a, b, c; cum verò hæc Quadra-

Digitized by Google

drata ſint poſitiva, ſequitur quod exceſſus ipſo rum $a^2 + b^2 + c^2$ ſupra $ab + ac + bc$ eſt etiam poſitivus; & ſumma Quadratorum trium Quantitatum major eſt ſummâ Productorum, quæ fiunt multiplicando binas Quantitates inter ſe.

Lemma III. *Tripla ſumma Quadratorum quatuor Quantitatum major eſt quàm dupla ſumma Productorum, quæ fiunt multiplicando binas Quantitates ex his inter ſe.* Nam $3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 3d^2 - 2ab - 2ac - 2ad - 2bc - 2bd - 2cd = a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2ac + c^2 + a^2 - 2ad + d^2 + b^2 - 2bd + d^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2cd + d^2 = \overline{a-b}^2 + \overline{a-c}^2 + \overline{a-d}^2 + \overline{b-c}^2 + \overline{b-d}^2 + \overline{c-d}^2$, id eſt ſummæ Quadratorum Differentiarum Quantitatum a, b, c, d, ideo $3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 3d^2$ majus eſt quam $2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$, cum exceſſus ſit ſemper poſitivus.

Lemma IV. *Sit* m *Numerus Quantitatum* a, b, c, d, e *&c. ſumma Quadratorum* = A, *Summa Productorum ex binis quibuſcunque illarum Quantitatum in ſe ductis* = B, *erit ſemper* $\frac{m-1}{2} \times$ A *majus quam* B.

Addendo enim Quadrata Differentiarum $a-b$, $a-c$, $a-d$, $b-c$, $b-d$, $c-d$ &c. a^2 ſumitur tot vicibus, quot dantur Quantitates præter a, idem dicendum de b^2, c^2, &c. Rectangula autem $-2ab - 2ac - 2ad - 2bc$ &c. ſemel tantum oriuntur; ergo ſumma omnium Quadratorum $\overline{a-b}^2 + \overline{a-c}^2 + \overline{a-d}^2 + \overline{b-c}^2 + \overline{b-a}^2 + \overline{c-d}^2$ &c. $= \overline{m-1} \times a^2 + \overline{m-1} \times b^2 + \overline{m-1} \times c^2 +$ &c. $- 2ab - 2ac - 2bc -$ &c. $= \overline{m-1} \times \text{A} - 2\text{B}$; ſed $\overline{a-b}^2$, $\overline{a-c}^2$, $\overline{a-d}^2$ &c. Sunt ſemper poſitiva, ergo $\overline{m-1} \times \text{A} - 2\text{B}$ eſt etiam poſitivum, ac proinde $\frac{m-1}{2} \times$ A majus eſt quam B.

Corol. Patet ex hac Demonſtratione exceſſum ipſius $\overline{m-1} \times \text{A}$ ſupra 2 B ſemper eſſe æqualem ſummæ Quadratorum differentiarum harum Quantitatum a, b, c, d &c. & ubi hæ Quantitates ſunt omnes æquales eſt $\overline{m-1} \times \text{A} - 2\text{B} = 0$, Aque cum hac modificatione intelligenda ſunt præcedentia Lemmata.

Obſervandum, quod licet ſuppoſuerim Quantitates, a, b, c, d, &c. eſſe poſitivas, propoſitiones etiam veras eſſe de Quantitatibus ne-

Digitized by Google

negativis, Quarum Quadrata eadem ſunt, ac ſi eſſent poſitivæ; Productorum vero ſumma vel eadem vel minor, quam ſi eſſent poſitivæ.

PROPOSITIO I.

In Æquatione Quadratica, cujus Radices ſunt reales, Quadratum ſecundi Termini ſemper majus eſſe debet, quam quater Productum ex primo & tertio.

Sint Radices $+a$, $+b$, x incognita. Æquatio erit

$$\begin{aligned} x^2 &- ax + ab = o. \\ &- bx \end{aligned}$$

Jam cum $a^2 + b^2$ ſit majus quam $2ab$ per Lem. I, erit $a^2 + b^2 + 2ab$ majus quam $4ab$; ideoque $\overline{a+b}^2\ x^2$ Quadratum Secundi Termini majus quam $4ab \times x^2$ quater Productum ex Primo & Tertio Termino.

PROPOSITIO II.

In omni Cubica Æquatione cujus omnes Radices ſunt reales, Quadratum 2^{di}. Termini ſemper majus eſt quam triplum Productum ex primo & tertio.

Æquatio Cubica cujus omnes Radices ſunt reales ſic poteſt exprimi

$$\begin{aligned} y^3 &- ay^2 + aby - abc = o. \\ &- by^2 + acy \\ &- cy^2 + bcy \end{aligned}$$

Per Lem. 2. $a^2 + b^2 + c^2$ majus eſt quam $ab + ac + bc$; addendo utrinque $2ab + 2ac + 2bc$, erit $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ ($= \overline{a+b+c}|^2$) majus quam $3ab + 3ac + 3bc$, ac proinde $\overline{a+b+c}^2 \times y^4$ Quadratum 2^{di}. Termini majus quam $\overline{3ab + 3ac + 3bc} \times y^4$, triplum Productum ex primo & tertio Termino.

Cor. I. In genere patet ex Demonſtratione, Quod Quadratum Summæ trium Quantitatum realium $\overline{a+b+c}^2$ ſemper majus eſt, quam tripla ſumma omnium Productorum, quæ fiunt multiplicando binas quaſcunque ex illis Quantitatibus inter ſe.

Cor.

Cor. II. Ex hac Propoſitione ſequitur, quod ſi Quadratum Secundi Termini non ſit majus triplo Producto ex primo & tertio, Radices Æquationis non poſſint omnes eſſe reales, ſed duæ erunt impoſſibiles; Quod plane coincidit cum una parte Regulæ NEWTONI, qua detegitur num Æquationis Cubicæ Radices ſint impoſſibiles.

Cupit enim Vir Celeberrimus Scribi ſupra medios Terminos Æquationis Fractionem hanc $\frac{1}{3}$, & ſignum + poni ſub primum & ultimum Terminum, ut hic vides;

$$\begin{matrix} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \\ x^3 & +px^2 & +qx & +r=0 \\ + & - & * & + \end{matrix}$$

deinde multiplicat Quadratum Secundi Termini per Fractionem, quæ ſupereminet, & ſi Productum illud majus ſit Producto ex Terminis adjacentibus, ponit ſignum + ſub ſecundo Termino; ſi vero illud Productum minus inveniatur, ponit ſignum —, atque affirmat tot dari Radices impoſſibiles, quot dantur mutationes inter ſigna. Jam per hanc Propoſitionem, ſi p^2x^4 non eſt majus quam $3qx^4$, vel $\frac{1}{3}p^2x^4$ non majus quam qx^4, Radices non poſſunt omnes eſſe reales; Eadem ſuppoſitio duas dat inter ſigna mutationes, quodcunque ſignum ſit ſub tertio Termino, cum ſigna ſub primo & ultimo ſint ambo +; hæc ergo Propoſitio demonſtrat primam partem Regulæ Newtonianæ, quantum ſpectat Cubicas Æquationes.

Cor. III. Si ſecundus Terminus deſit in Cubica Æquatione & tertius Terminus ſit poſitivus, Æquatio habebit duas Radices impoſſibiles; Quadratum enim ſecundi Termini (in hoc caſu $= 0$) minus erit triplo Producto ex Terminis adjacentibus. Sed hoc clarius patebit conſiderando, quod ubi ſecundus Terminus evaneſcit in Æquatione, Radices poſitivæ & negativæ ſunt æquales, & ſe mutuo deſtruunt; pone Radices eſſe $+a$ & $-b-c$; in hoc caſu $a=b+c$, & tertii Termini Coefficiens erit $-ab-ac+bc=-bb-2bc-cc+bc=-bb-bc-cc$, ideoque negativus; vel ſi ponas duas Radices poſitivas, & unam negativam, ſintque $-a, +b, +c$, erit nihilominûs tertii Termini Coefficiens negativus, nempe erit $-bb-bc-cc$; Quare ſi Radices ſint reales, tertii Termini Coefficiens ſemper eſt negativus (deficiente ſcilicet ſecundo Termino) ſi vero Coefficiens ille ſit poſitivus, certum eſt indicium duas dari Radices impoſſibiles.

PRO-

PROPOSITIO. III.

In omni Æquatione Cubica, cujus omnes Radices ſunt reales, Quadratum Termini Tertii, ſemper majus eſſe debet, quam ter Productum ex ſecundo, & quarto.

In Cubica Æquatione, cujus Radices ſunt a, b, c, Quadratum Coefficientis tertii Termini eſt $\overline{ab+ac+bc}^2$; productum ex Coefficientibus ſecundi & quarti eſt $a^2bc+ab^2c+abc^2$, ut patet ex ſola inſpectione Æquationis; porro clarum eſt, $a^2bc+ab^2c+abc^2$ eſſe ſummam Productorum ex binis quantitatum ab, ac, bc; ideo per Cor. I. Propoſ. II. Quadratum ſummæ harum Quantitatum (id eſt, $\overline{ab+ac+bc}^2$) majus eſſe debet quam $3a^2bc+3ab^2c+3abc^2$; itaque $\overline{ab+ac+bc}^2\times y^2$, id eſt Quadratum Tertii Termini, majus eſſe debet quam $\overline{3a^2bc+3ab^2c+3abc^2}\times y^2$, id eſt, quam triplum Productum ex ſecundo & quarto Termino.

Cor. 1. Sequitur ac Demonſtratione, quod $\overline{ab+ac+bc}^2$ majus eſt quam $3abc\times\overline{a+b+c}$.

Cor. 2. Si Quadratum tertii Termini minus inveniatur, quam triplum Productum e ſecundo & quarto Termino, Radices Æquationis non poſſunt omnes eſſe reales; quod convenit cum ſecunda parte Regulæ Newtonianæ; hic enim. Caſus dat — ponendum ſub tertio Termino. Itaque duæ ſunt mutationes ſignorum, quodcunque ſit ſignum ſub ſecundo Termino.

$$\begin{array}{cccc} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \\ x^3 & +px^2 & +qx & +v=0 \\ + & + & - & + \end{array}$$

Scholium. Eodem modo demonſtrari poteſt, quod ſi in Cubica Æquatione ſecundus Terminus deſit, Cubum tertiæ partis tertii Termini poſitive ſumti, ſemper majorem eſſe Quadrato ultimi Termini dimidiati.

Sint Æquationis Radices $+a$, $-b$, $-c$, vel $-a$, $+b$, $+c$; ſitque $a=b+c$. in hoc caſu deficiet ſecundus Terminus, ipſaque Æquatio hanc formam induet,

$$\begin{array}{l} y^3 * -b^2y \pm bc\times\overline{b+c}=0. \\ \qquad -bcy \\ \qquad -c^2y \end{array}$$

Qua-

Quadratum ipſius $b-c$ ſemper eſt poſitivum, cum b & c ſint Quantitates reales, ponamus illud Quadratum $(bb-2bc+cc)$ æquale D, erit $b^2+bc+c^2=D+3bc$, & $\overline{b+c}^2=D+4bc$; erit ideò $\frac{\overline{b^2+bc+c^2}^3}{27}=\frac{D^3}{27}+\frac{D^2bc}{3}+Db^2c^2+b^3c^3$, & $b^2c^2\times\frac{\overline{b+c}^2}{4}=\frac{Db^2c^2}{4}+-b^3c^3$. Jam clarum eſt quod $\frac{D^3}{27}+\frac{D^2bc}{3}+Db^2c^2+b^3c^3$ majus eſt $\frac{Db^2c^2}{4}+b^3c^3$, (Totum majus parte) cum D ſit poſitivum ut etiam bc, nam b & c ſunt radices eodem ſigno affectæ. Idcirco Cubus tertiæ partis tertii Termini, ſigno mutato, $\left(\frac{\overline{b^2+bc+c^2}^3}{27}\right)$ ſemper major eſt Quadrato ultimi Termini dimidiati $\left(b^2c^2\times\frac{\overline{b+c}^2}{4}.\right)$ In Cubica Æquatione $x^3 * +qx+r=0$, ſi q ſit poſitivum, vel ſi $\frac{q^3}{27}$ minus ſit quam $\frac{1}{4}r^2$, patet Æquationem duas habere Radices impoſſibiles ſi hoc Corol. conferatur cum Cor. III. Prop. II.

PROPOSITIO IV.

In Æquatione Quadrato-quadratica, cujus omnes Radices sunt Reales, $\frac{3}{8}$ Quadrati Termini Secundi semper superant productum ex primo & tertio Termino; & $\frac{3}{8}$ Quadrati quarti Termini semper superant Productum ex tertio & quinto.

1. Sit Æquatio $x^4-px^3+qx^2-rx+s=0$; Cum omnes Radices ponantur reales, vocentur a, b, c, d. erit $p=a+b+c+d$. $q=ab+ac+ad+cd$. Sed patet per Lem. 3. quod $3a^2+3b^2+3c^2+3d^2$ majus eſt quam $2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$; addendo utrinque $6ab+6ac+6ad+6bc+6bd+6cd$, patebit $3\times\overline{a+b+c+d}^2$ majus eſſe quam $8ab+8ac+8ad+8bc+8bd+8cd$; id eſt $3p^2$ majus eſſe quam $8q$, ideoque $\frac{3}{8}p^2x^6$ majus quam qx^6.

Q q

2. Cum

in $\overline{m-1}$, majus eſt quam ſumma Productorum, quæ fiunt multiplicando binas illis quaſcunque ex illis Quantitatibus inter ſe, ducta

2. Cum ſit $r = abc + abd + acd + bcd$; & $s = abcd$; & cum $qs = a^2b^2cd + a^2c^2bd + a^2d^2bc + b^2c^2ad + b^2d^2ac + c^2d^2ab$, quæ ſumma componitur ex productis quæ oriuntur multiplicando inter ſe binas quaſcunque ex quantitatibus abc, abd, acd, bcd, quarum ſumma $= r$; ſequitur $3r^2$ ſemper majus eſſe, quam $8qs$. Ita ut $\frac{3}{8}$ Quadrati ſecundi vel quarti Termini ſemper ſuperent Productum ex Terminis utrinque adjacentibus.

Cor. Multiplicetur Quadratum ſecundi vel quarti Termini in Æquatione Quadrato-quadratica per fractionem $\frac{3}{8}$, & ſi Productum illud non excedat Productum ex Terminis adjacentibus, Æquatio habebit quaſdam Radices impoſſibiles.

PROPOSITIO V.

Sit Æquatio cujuſcunque Dimenſionis ut m, ſintque Cœfficientes ſecundi, tertii, ultimi, penultimi antepenultimi Termini reſpective A, B, E, D, C; *ſi Radices ſint omnes Reales, erit* $\overline{m-1} \times A^2$ *ſemper majus, quam* $2mB$, *&* $\overline{m-1} \times D^2$ *ſemper majus quam* $2m$ CE.

1. Nam pone Radices eſſe a, b, c, d, e, &c. erit per Lem. 4. $\overline{m-1} \times a^2 + \overline{m-1} \times b^2 + \overline{m-1} \times c^2$ &c. majus quam $2ab + 2ac + 2ad$ &c. addendo utrinque $\overline{2m-2} \times ab + \overline{2m-2} \times ac + \overline{2m-2} \times ad$, &c. ſumma $\overline{m-1} \times a^2 + \overline{2m-2} \times ab + \overline{m-1} \times b^2 +$ &c. $(\overline{m-1} \times \overline{a+b+c\ \&c}^2)$ major erit quam $2mab + 2mac + 2mad +$ &c. id eſt $\overline{m-1} \times A^2$ majus erit quam $2mB$.

2. In Genere ſequitur ex hac Demonſtratione, quod Quadratum ſummæ quarumvis Quantitatum, quarum numerus eſt m, ductum in

in $2m$. Sed facile cognoſcitur ex formatione Æquationum, quod CE eſt ſumma Productorum quæ fiunt ex multiplicatione binarum Quantitatum, quarum ſumma eſt D. Quare ſequitur etiam $\overline{m-1} \times D^2$ majus eſſe quam $2m$CE.

SECUNDA EPISTOLA EJUSDEM AD EUNDEM,

De Radicibus Æquationum, cum Demonſtratione aliarum quarundam Regularum Algebræ.

Anno 1725 ad te ſcripſi me habere Methodum demonſtrandi NEWTONI Regulam de Radicibus impoſſibilibus in Æquationibus, quæ Methodus ex hoc claro Principio deducitur; Quadrata ſcilicet Differentiarum Quantitatum realium ſemper eſſe poſitiva. Deinde prima hujus Methodi Principia tibi miſi, quæ in Tranſactionibus Philoſophicis Menſis Maji Anni 1726 in lucem fuere edita; Propoſitum, quod ante aliquod tempus habui, edere Tractatum de Algebra, in quo & hunc & quoſdam alios ſubjectos tractarem nova via, in cauſa fuit cur non operæ pretium putarem reliqua tibi mittere; ſed quædam me jam movent rationes, ut una cum continuatione Præcedentis Methodi, parvum tibi mittam ſpecimen duarum aliarum Methodorum, quas in eodem ſubjecto ſum ſecutus, cum quibusdam in Æquationes obſervationibus, quas novas eſſe opinor; & quæ forſan magis tibi placebunt, quam quod pertinet ad ipſas Radices impoſſibiles; Præter NEWTONI Regulam, e ſequentibus generalibus Propoſitionibus multæ variæque oriuntur Regulæ inveniendi Radices imaginarias, diverſæ tum ab ea, quam NEWTONUS edidit, tum ab omnibus aliis, quæ jam in lucem prodierunt; unam ſpeciatim exponam, omnibus huc uſque notis utiliorem.

Ponamus dari Æquationem Dimenſionum n, & hujus formæ

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - Ex^{n-5} + Fx^{n-6} - Gx^{n-7} + Hx^{n-8} - Ix^{n-9} + Kx^{n-10} \text{ \&c.}$$

Sintque hujus Æquationis Radices $a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l$ &c. erit $A = a+b+c+d+e$ &c. voco itaque a, b, c, &c. *Partes* ſeu *Terminos* Coefficientis A; eandem ob cauſam vo-

Digitized by Google

co *a b*, *a c*, *a d*, *a e*, *b c*, *b d*, *b e* &c. *Partes* ſeu *Terminos* Coefficientis B; *a b c*, *a b d*, *a b e*, *b c d*, &c. *Partes* ſeu *Terminos* Coefficientis C, & ſic de cæteris. Per *Dimenſionem* alicujus Termini intelligo Numerum Radicum, quæ in ejus partibus inter ſe ſunt multiplicatæ, qui numerus ſemper æqualis eſt numero Terminorum, qui in Æquatione hunc Coefficientem præcedunt; Sic A eſt Coefficiens unius Dimenſionis, B duarum, C trium, & ſic de cæteris. Partem ſeu Terminum Coefficientis C dico *ſimilem* Parti ſeu Termino Coefficientis G, ubi illa pars ipſius G continet omnes radices Partis ipſius C, ſic *a b c* & *a b c d e f g* ſunt Partes ſimiles ipſorum C & G; eodem modo *a b c d*, & *a b c d e f* ſunt Partes ſimiles ipſorum D & F; cum Pars ipſius F contineat omnes Radices Partis ipſius D. *Diſſimiles* voco Partes, quæ communem Radicem non habent, ſic *a b c*, & *d e f g h* ſunt Partes Diſſimiles Coefficientium C & F. Summam omnium Productorum, multiplicando partes alicujus Coefficientis ut C per ſimiles partes alius Coefficientis ut G ſic ex primo $C'\,G'$ ducendo Lineolam ſupra utrumque Coefficientem, eodem modo $D'\,F'$ exprimit ſummam omnium Productorum, quæ fieri poſſunt multiplicando Partes ſimiles ipſorum D & F inter ſe, & $C' \times C'$ exprimit ſummam Quadratorum omnium Partium Coefficientis C; ſed $C' \times C_{,}$, exprimit ſummam omnium productorum quæ fiunt multiplicando binos quoſcunque Terminos ipſius C inter ſe. (unde ſequitur $C^2 = C' \times C' + 2\,C' \times C_{,,}$.) Hiſce ſignis intellectis, & quinque Propoſitionibus Præcedentis Epiſtolæ præmiſſis ſequitur jam.

PROPOSITIO VI.

Si Differentia Dimenſionum duorum quorumvis Coefficientium ut C & G *vocetur* m, *erit Productum horum Coefficientium æquale* $C'G' +$

$$\overline{m+2} \times B'H' + \frac{m+3}{1} \times \frac{m+4}{2} \times A'I' + \frac{m+4}{1} \times \frac{m+5}{2} \times \frac{m+6}{3} \times 1 \times K.$$

Ubi B & H ſunt Coefficientes adjacentes ipſis C & G, A & I Coefficientes adjacentes ipſis B & H, 1 & K Coefficientes adjacentes ipſi A & I.

No-

Notum eſt C eſſe æquale $abc + abd + abe + abf + abg +$ &c. $G = abcdefg + abcdefh + abcdefi + bcdefgh +$ &c. Patet ulterius.

1°. Quod in Producto CG unusquisque Terminus ipſius C′G′ ſemel orietur, ut $a^2b^2c^2defg$. Sed

2°. Quivis Terminus ipſius B′H′, ut $a^2b^2cdefgh$, poteſt eſſe Productum vel ex $abc \times abdefgh$, vel ex $abd \times abcefgh$, vel ex $abe \times abcdfgh$, vel ex $abf \times abcdegh$, vel ex $abg \times abcdefh$, vel tandem ex $abh \times abcdefg$; itaque poteſt eſſe Productum ex quovis Termino ipſius C qui cum Radicibus, ab, contineat unam ex reliquis c, d, e, f, g, h, multiplicato per illum Terminum ipſius G, qui cum ab cæteras quinque Radices continet; id eſt Productum illud $a^2b^2cdefgh$ tot dabitur vicibus, quot continet Radices præter a, & b; vel in genere toties quoties unitas datur in Differentia Dimenſionum ipſorum B & H. id eſt $m + 2$ vicibus, quia m exprimit differentiam Dimenſionum ipſorum C & G; idcirco, in expreſſione Valoris ipſius C G, Coefficiens ſecundi Termini, B′H′ erit $m + 2$.

3°. Unusquisque Terminus, ipſius A′I′, ut $a^2bcdefghi$, poteſt eſſe Productum cujusvis Partis ipſius C, quæ cum Radice a contineat duas quascunque e reliquis b, c, d, e, f, g, h, i, (quarum numerus æqualis eſt Differentiæ Dimenſionum ipſorum A & I, id eſt in genere $= m + 4$) multiplicatæ cum illa parte ipſius G quæ cum a reliquas ſex radices continet; itaque $a^2bcdefghi$ (vel quivis alius ipſius A′I′ Terminus) tot dabitur vicibus, quot dari poſſunt diverſa Producta ex binis Quantitatibus, quarum Numerus eſt $m + 4$, id eſt vicibus $m+4 \times \frac{m+4-1}{2}$, vel $\frac{m+3}{1} \times \frac{m+4}{2}$; ideo ad exprimendum Valorem ipſius C G Coefficiens tertii Termini A′ I′ debet eſſe $\frac{m+3}{1} \times \frac{m+4}{2}$.

4°. Unusquiſque Terminus ipſius $1 \times K$, ut $abcdefghik$, poteſt eſſe productum ex quavis parte ipſius C, quæ continet tres radices ipſius K, in illam partem ipſius G, quæ alias omnes continet radices; ideo $1 \times K$ tot orietur vicibus in producto CG, quot fieri poſſunt diverſa producta ex ternis Quantitatibus, quarum numerus eſt

 $m+6$

$m+6$, id eſt vicibus $m+6\times\frac{m+5}{2}\times\frac{m+4}{3}$; ideoque Coefficiens quarti Termini in Expreſſione Valoris ipſius CG, erit $\frac{m+4}{1}\times\frac{m+5}{2}\times\frac{m+6}{3}$.

In genere, ad exprimendum Valorem Producti duorum quorumvis Coefficientium, ut C & G. Si x exprimat ordinem alicujus Termini hujus Valoris, ut ex: gr: ipſius $A'I'$, ideſt, ſi x ſit æqualis numero Terminorum qui præcedunt $A'I'$, ipſius $A'I'$ Coefficiens erit $\frac{2x+m}{1}\times\frac{2x+m-1}{2}\times\frac{2x+m-2}{3}$. &c. tot ſumendo fractiones in hac Progreſſione, quot dantur unitates in x.

Cor. 1. Si per hanc Propoſitionem quæratur Quadratum alicujus Coefficientis, ut E, erit $m=0$, Differentia Dimenſionum Coefficientium in hoc Caſu evaneſcente, & habebimus $E^2 = E'\times E' + 2D'F' + 3\times\frac{4}{2}C'G' + 4\times\frac{5}{2}\times\frac{6}{3}\times B'H'$ &c. $= E'\times E' + 2D'F' + 6C'G' + 20B'H' + 70A'I' + 252K$: idcirco, ſi (ut in Definitione) $E'\times E$, exprimat ſummam Productorum ex binis partibus quibuſcunque ipſius E erit $E^2 = E'\times E' + 2E'\times E_{,}$, ideoque $E'\times E_{,} = D'F' + 3C'G' + 10B'H' + 35A'I' + 126K$.

Cor. 2. Sequitur ex hac Propoſitione, quod

$$\begin{aligned}
E^2 &= E'\times E' + 2D'F' + 6C'G' + 20B'H' + 70A'I' + 252K.\\
DF &= \cdots D'F' + 4C'G' + 15B'H' + 56A'I' + 210K.\\
CG &= \cdots C'G' + 6B'H' + 28A'I' + 120K.\\
BH &= \cdots B'H' + 8A'I' + 45K.\\
AI &= \cdots A'I' + 10K.\\
K &= \cdots K.
\end{aligned}$$

Cor. 3. Facile quoque patet ex Corol. Præcedente, quod

$$\begin{aligned}
E'\,E' &= E^2 - 2DF + 2CG - 2BH + 2AI - 2K.\\
D'F' &= \cdots DF - 4CG + 9BH - 16AI + 25K.\\
C'G' &= \cdots CG - 6BH + 20AI - 50K.\\
B'H' &= \cdots BH - 8AI + 35K.\\
A'I' &= \cdots AI - 10K.
\end{aligned}$$

PRO-

PROPOSITIO VII.

Sit $l = n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$ *&c., ſumendo tot fractiones, quot Coefficiens* E *habet dimenſiones, erit ſemper* $\frac{l-1}{2l} \times E^2$ *majus quam* $DF - CG + BH - AI + K$, *ſi Radices Æquationis ſunt omnes reales.*

Patet l exprimere numerum Partium ſeu Terminorum qui dantur in Coefficiente E; Patet quoque ex Prop. V. quod $\frac{l-1}{2l} \times E^2$ ſemper majus eſſe debet, quam ſumma Productorum, quæ fiunt multiplicando binas Partes quaſcunque ipſius E inter ſe, id eſt majus quam $E' \times E_{,}$; Sed $2E' \times E_{,} = E^2 - E' \times E' =$ (per Theor. 1. Corol. ultimi) $2DF - 2CG + 2BH - 2AI + 2K$; idcirco, cum $\frac{l-1}{2l} \times E^2$ ſemper ſit majus quam $E'E$, ſequitur quod $\frac{l-1}{2l} \times E^2$ etiam majus eſt quam $DF - CG + BH - AI + K$, ſi Æquationis Radices ſint omnes reales.

Scholium. Hæc prima fuit generalis Propoſitio, quæ ſequendo Methodum meam mihi occurrebat. Cum enim primo obſervarem, quod, ſi l exprimat numerum quarumvis Quantitatum, Quadratum illarum ſummæ ductum in $\frac{l-1}{2l}$ ſemper majus eſſet ſumma Productorum quæ fiunt multiplicando binas quaſcunque ex illis inter ſe, & quod exceſſus eſſet æqualis ſummæ Quadratorum Differentiarum harum Quantitatum diviſæ per $2l$, facile inde patebat, quod ſi in Æquatione $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4}$ &c. $= 0$, ubi B eſt ſumma Productorum quæ oriuntur ex multiplicatione binarum Radicum inter ſe, ſi l exprimat numerum Radicum in Æquatione, $\frac{l-1}{2l} \times A^2$ ſemper eſſe majus quam B; atque hæc eſt una pars Prop. V. Dein-

Deinde comparavi ſummam Productorum ex binis Partibus ipſius B, cum Producto AC, illamque ſummam inveni æqualem non ipſi AC, ſed AC — D; unde collegi, quod ſi l exprimat numerum Partium ipſius B, tunc $\frac{l-1}{2l} \times B^2$ ſemper eſſe majus quam AC — D, hæc que facile me duxerunt ad hanc generalem Propoſitionem.

PROPOSITIO VIII.

Exprimat r *Dimenſiones Coefficientis* C, *&* s *Differentiam Dimenſionum Coefficientium* C *&* G, *ſint* B *&* H *Coefficientes adjacentes ipſis* C *&* G, *erit ſemper* $\overline{n-r-s} \times r \times C'G'$ *majus quam* $\overline{s+1} \times \overline{s+2} \times B'H'$, *ſi omnes Æquationis Radices ſint Quantitates reales, eodem ſigno affectæ.*

Nam ſumendo Differentias omnium harum Partium ipſius C, quæ habent omnes Radices communes præter unam, ut abc, abh, abi, &c. & multiplicando Quadrata harum Differentiarum per illas partes Coefficientis D, quæ ſunt diſſimiles utrique parti ſumtæ differentiæ, (requiritur ut Coefficiens D ſit dimenſionum s), ſumma omnium horum Quadratorum ita multiplicatorum conſiſtet ex Terminis ipſius C′ G′ poſitive ſumtis, & ex Terminis ipſius B′ H′ negative ſumtis. Multiplicando hoc modo $\overline{abc-abh}|^2 + \overline{abc-abi}|^2 + \overline{abc-abk}|^2$ &c. $+ \overline{abc-ach}|^2 + \overline{abc-aci}|^2 + \overline{abc-ack}|^2$ &c. $+ \overline{abc-bch}|^2 + \overline{abc-bci}|^2 + \overline{abc-bck}|^2$ &c. per $defg$ Terminum ipſius D, qui eſt diſſimilis omnibus hiſce Partibus ipſius C, patebit quod $a^2b^2c^2defg$ dabitur in ſumma Productorum vicibus $r \times \overline{n-r-s}$; hæc enim Producta poſſunt etiam ſic exprimi $defga^2b^2 \times \overline{\overline{c-h}|^2 + \overline{c-i}|^2 + \overline{c-k}|^2}$ &c. $+ defga^2c^2 \times \overline{\overline{b-h}|^2 + \overline{b-i}|^2 + \overline{b-k}|^2}$ &c. $+ defgb^2c^2 \times \overline{\overline{a-h}|^2 + \overline{a-i}|^2 + \overline{a-k}|^2}$ &c. ubi Numerus differentiarum $c-h$, $c-i$, $c-k$, &c. quarum Quadrata ducuntur in $defga^2b^2$, manifeſte æqualis eſt numero Radicum Æquationis, quæ non dantur in

a^2b^2

$a^2 b^2 c^2 defg$, vel in $abcdefg$, ideſt, æqualis exceſſui numeri Radicum Æquationis, ſupra dimenſiones ipſius $abcdefg$, qui eſt Terminus ipſius G, ideſt tandem æqualis $n-r-s$; Sed colligendo in unam ſummam omnia illa Producta, terminus $\overline{n-r-s} \times a^2 b^2 c^2 defg$ toties dabitur, quoties unitas datur in r; quia Termini, qui ſubtrahuntur ex abc, poſſunt ab illo differre vel per defectum Radicis c, ut abb, abi, abk, &c., vel per defectum Radicis b, ut acb, aci, ack &c., vel per defectum Radicis a, ut bcb, bci, bck &c. ideſt Terminus $\overline{n-r-s} \times a^2 b^2 c^2 defg$ tot vicibus debet oriri, quot dantur dimenſiones in abc uno ex terminis ipſius C, vel quot dantur unitates in numero r, qui exprimit Dimenſiones ipſius C; ideoque Terminus $a^2 b^2 c^2 defg$ dabitur in ſumma dictorum Productorum vicibus $r \times \overline{n-r-s}$.

Pars negativa conſiſtet ex Terminis ipſius B′H′ duplicatis, quorum unusquisque ut $a^2 b^2 cdefgh$ tot oriri debet vicibus, quot dari poſſunt Differentiæ $c-d$, $c-e$, $c-f$, $c-g$, $d-e$ &c. inter terminos c, d, e, f, g &c., quorum Numerus eſt æqualis $s+2$; id eſt, Terminus $2a^2 b^2 cdefgh$ dari debet vicibus $\overline{s+2} \times \frac{s+1}{2}$; ideoque $a^2 b^2 cdefgh$, vel quivis alius ipſius B′H′ Terminus dari debet in Parte negativa vicibus $\overline{s+1} \times \overline{s+2}$; cum autem tota ſumma ſit Poſitiva, ſequitur quod $\overline{n-r-s} \times r$ C′G′ ſemper majus eſt quam $\overline{s+1} \times \overline{s+2} \times$ B′H′.

COR. 1. Sit comparandum E′E′ ſumma Quadratorum Partium ipſius E, cum D′F′ ſumma Productorum ex Partibus ſimilibus ipſorum D & F; in hoc caſu s evaneſcit, & $\overline{n-r} \times r$E′E′ debet eſſe majus quam 2 D′F′. Sit $\overline{n-r} \times r = m$, erit $\overline{n-r-1} \times \overline{r-1} = m-n+1$; & $\overline{n-r-2} \times \overline{r-2} = m-2n+4$; & $\overline{n-r-3} \times \overline{r-3} = m-3n+9$; $\overline{n-r-4} \times \overline{r-4} = m-4n+16$, patet enim in genere, quod $\overline{n-r-q} \times \overline{r-q} = \overline{n-r} \times r - qn + qq = m - qn + qq$. Tunc per hanc propoſitionem ſupponendo

$$mE'E' - 2D'F' = a'$$
$$\overline{m-n+1}\times D'F' - 12C'G' = b'$$
$$\overline{m-2n+4}\times C'G' - 30B'H' = c'$$
$$\overline{m-3n+9}\times B'H' - 56A'I' = d'$$
$$\overline{m+4n+16}\times A'I' - 90K = e'$$

Quantitates a', b', c', d', e', ſemper debent eſſe poſitivæ, ubi omnes Æquationis Radices ſunt Quantitates reales eodem ſigno affectæ; Coefficientes Partibus Negativis præfixi ſunt numeri 2, 12, 30, 56, 90, quarum differentiæ creſcunt per 8 in Progreſſione Arithmetica.

COR. 2. Ponendo ut ſupra $\overline{n-r}\times r = m$, ut etiam $m\times\overline{m-n+1}=m'$, $m'\times\overline{m-2n+4}=m''$, $m''\times\overline{m-3n+9}=m'''$, poteſt demonſtrari eodem modo, quo hæc Propoſitio demonſtrata fuit, quod ſi ſit

$$mE'E' - 2D'F' = a'$$
$$m'E'E' - 2\times 12C'G' = a''$$
$$m''E'E' - 2\times 12\times 30B'H' = a'''$$
$$m'''E'E' - 2\times 12\times 30\times 56A'I' = a'''' \text{ \&c.}$$

Erunt a', a'', a''', a'''', &c. ſemper Poſitiva, ſi Radices Æquationis ſint Reales, ſive iiſdem ſignis afficiantur ſive diverſis: Coefficientes Negativi fiunt ducendo coefficientes 2, 12, 30, 56, 90, Cor. Præcedentis in ſe invicem.

PROPOSITIO. IX.

Exprimant a', b', c', d', e', *&* m *eaſdem Quantitates ac in Corollariis ultimæ Propoſitionis, & erit* $mE^2 - \overline{m+n+1}\times DF = a'+b'+2c'+5d'+14e'$.

Nam per Cor. 2. Prop. VI.

$$E^2 = E'E' + 2D'F' + 6C'G' + 20B'H' + 70A'I' + 252K,$$

& per idem Cor.

$$DF = - \; - \; - \; D'F' + 4C'G' + 15B'H' + 56A'I' + 210K;$$

Ergo

Digitized by Google

Ergo $m E^2 - \overline{m+n+1} \times DF = m E'E' + \overline{m-n-1} \times D'F' + \overline{m-2n-2} \times 2C'G' + \overline{m-3n-3} \times 5B'H' + \overline{m-4n-4} \times 14A'I' + \overline{m-5n-5} \times 42K =$ (ſubſtituendo ſucceſſive pro $m E'E'$, $\overline{m-n+1} \times D'F'$, $\overline{m-2n+4} \times C'G'$, $\overline{m-3n+9} \times B'H'$, $\overline{m-4n+16} \times A'I'$, ipſorum valores deducti ex primo Corol. Propoſitionis Præcedentis) $a'+b'+2c'+5d'+14e'$, ubi Coefficientes Præfixi ipſis a', b', c', d', e', ſunt Differentiæ Coefficientium ipſorum $E'E'$, $D'F'$, $C'G'$, $B'H$, $A'I'$, & K in Valoribus ipſorum E^2 & DF deſumtis ex Corol. 2. Prop. VI. ſuntque $1-0$, $2-1$, $6-4$, $20-15$, $70-56$, & $252-210$.

COR. Cum ſit $m = \overline{n-r} \times r$, ideoque $m+n+1 = \overline{n-r+1} \times \overline{r+1}$, ſequitur, quod $\frac{r}{r+1} \times \frac{n-r}{n-r+1} \times E^2$ ſemper debet eſſe majus quam DF, Productum ex Coefficientibus adjacentibus ipſi E; atque inde deducuntur fractiones, quæ in NEWTONI Regula ſcribuntur ſupra Terminos Æquationis, & quæ multiplicatæ per Quadrata Terminorum, quibus ſupereminent, ſemper debent efficere Productum majus Producto ex Terminis adjacentibus; ſi Radices Æquationis ſint reales: Manifeſtum enim eſt, quod fractio ſcribenda ſuper Terminum $E x^{n-r}$ diviſionis ipſius $\frac{n-r}{r+1}$ per $\frac{n-r+1}{r}$.

P R O P O S I T I O X.

Iisdem Notis ſervatis ac in Propoſitionibus præcedentibus, eodem modo invenietur, quod, ut

$$m E^2 - \overline{m+n+1} \times DF = a' + b' + 2c' + 5d' + 14e' \text{ ita}$$
$$\overline{m-n+1} \times DF - \overline{m+2n+4} \times CG = \quad b' + 3c' + 9d' + 28e',$$
$$\overline{m-2n+4} \times CG - \overline{m+3n+9} \times BH = \quad c' + 5d' + 20e',$$
$$\overline{m-3n+9} \times BH - \overline{m+4n+16} \times AI = \quad d' + 7e',$$
$$\overline{m-4n+16} \times AI - \overline{m+5n+25} \times K = \quad e'.$$

Hæc Theoremata facile deducuntur ex iis, quæ habentur in Cor. 2.

Prop. VI. & in Cor. 1. Prop. VIII. & Coefficientes præfixi ipſis a', b', c', d', e', ſunt Differentiæ Coefficientium terminorum Reſpondentium in Valoribus ipſorum E^2, DF, CG, BH, AI, & K, in Corol. 2. Prop. VI.

COR. Inde Producta duorum quorum vis Coefficientium inter ſe poſſunt conferri, ut DF & AI, ſi ſumma Dimenſionum ipſorum D & F ſit æqualis ſummæ Dimenſionum ipſorum A & I. Sint Dimenſiones ipſorum A & F reſpective æquales ipſis s, & m, ſitque $p = \frac{n-s}{s+i} \times \frac{n-s-1}{s+2} \times \frac{n-s-3}{s+3}$ &c. tot ſumendo factiones, in eadem Progreſſione, quot dantur unitates in differentia Dimenſionum ipſorum D & A. Sit $q = \frac{n-m}{m+1} \times \frac{n-m-1}{m+2} \times \frac{n-m-2}{m+3}$ &c., tot ſumendo fractiones, quot ſumtæ fuerunt in Valore ipſius p. Erit ſemper $\frac{q}{p} \times DF$ majus quam AI ſi omnes Radices Æquationis ſint Quantitates Reales, eodem ſigno affectæ. Hæc Regula etiam locum habet, licet Radices diverſis afficiantur ſignis, ſi modo Coefficientes D & F ſint æquales.

PROPOSITIO XI.

Iisdem poſitis ac in Propoſitionibus Præcedentibus,

erit 1. $\left.\begin{array}{l} mE^2 - \overline{m+1} \times 2DF + \overline{m+4} \times 2CG - \overline{m+9} \times 2BH \\ + \overline{m+16} \times 2AI - \overline{m+25} \times 2K \end{array}\right\} = a'.$

2. $\left.\begin{array}{l} \overline{m-n+1} \times DF - \overline{m-n+4} \times 4CG + \overline{m-n+9} \times 9BH \\ - \overline{m-n+16} \times 16AI + \overline{m-n+25} \times 25K \end{array}\right\} = b'.$

3. $\left.\begin{array}{l} \overline{m-2n+4} \times CG - \overline{m-2n+9} \times 6BH + \overline{m-2n+16} \\ \times 20AI - \overline{m-2n+25} \times 50K \end{array}\right\} = c'.$

4. $\overline{m-3n+9} \times BH - \overline{m-3n+16} \times 8AI + \overline{m-3n+25} \times 35K = d'.$

5. $\overline{m-4n+16} \times AI - \overline{m-4n+25} \times 10K = e'.$

Hæc Theoremata facile deducuntur ex Cor. 3. Prop. VI. Primum clare patet hoc modo, $a' = mE'E' - 2D'F' =$ (per dictum Corollarium)

m

$$\left.\begin{array}{l} mE^2 - 2mDF + 2mCG - 2mBH + 2mAI - 2mK \\ \quad - 2DF + 8CG - 18BH + 32AI - 50K \end{array}\right\} = mE^2 -$$
$$\overline{m+1} \times 2DF + \overline{m+4} \times 2CG - \overline{m+9} \times 2BH + \overline{m+16} \times 2AI - \overline{m+25} \times 2K.$$

Reliqua Theoremata deducuntur ex eodem Corollario collato cum Cor. 1. Prop. VIII.

PROPOSITIO XII.

Iisdem poſitis ac in Cor, 2. Prop. VIII. erit

$$1.\ \left.\begin{array}{l} mE^2 - \overline{m+1} \times 2DF + \overline{m+4} \times 2CG - \overline{m+9} \times 2BH + \overline{m+16} \\ \times 2AI - \overline{m+25} \times 2K \text{ - - - - - - - - - -} \end{array}\right\} = a'.$$

$$2.\ \left.\begin{array}{l} m'E^2 - 2m'DF + \overline{m'-12} \times 2CG - \overline{m'-72} \times 2BH + \\ \overline{m'-240} \times 2AI - \overline{m'-600} \times 2K \text{ - - - - - -} \end{array}\right\} = a''.$$

$$3.\ \left.\begin{array}{l} m''E^2 - 2m''DF + 2m''CG - \overline{m''+360} \times 2BH - \\ \overline{m''+360 \times 8} \times 2AI. - \overline{m''+360 \times 35} \times 2K \text{ - - -} \end{array}\right\} = a'''.$$

$$4.\ \left.\begin{array}{l} m''' \times \overline{E^2 - 2DF + 2CG - 2BH} + \overline{m''' - 750 \times 28} \times \\ 2AI - \overline{m''' - 7200 \times 28} \times 2K \text{ - - - - - - -} \end{array}\right\} = a''''.$$

Hæc Theoremata fluunt ex Cor. 3. Prop. VI. Collato cum Corol. 2. Prop. VIII. Primum idem eſt ac primum in Propoſitione Præcedente: Secundum demonſtratur ſubſtituendo in $mE'E' - 24 C'G' = a''$ Valores ipſorum $E'E'$ & $C'G'$ ex Corol. 3. Prop. VI. Tertium invenitur ſubſtituendo in $m''E'E' - 720 B'H' = a'''$ Valores ipſorum $E'E'$ & $B'H'$; atque ſimili ſubſtitutione continuari poſſunt hæc Theoremata.

COROLLARIUM GENERALE.

Ex hiſce Propoſitionibus, magna deducitur varietas Regularum, quibus inveniri poteſt, num Æquatio aliqua habeat Radices imaginarias, nec ne; Fundamentum Regulæ NEWTONIANÆ demonſtratur Prop. IX. & ipſius Corollariis; Septima Propoſitio oſtendit, quod ſi $\frac{l-1}{2l} \times E^2$ non ſit majus quam $DF - CG + BH - AI + K$ quædam Æquationis Radices debent eſſe imaginariæ; atque hæc Regula aliquando deteget Radices imaginarias, quæ per NEWTONI

Regulam non apparent. Huc uſque nulla Regula præter haſce duas publicata fuerat. Sed Regulæ, quæ ex Theorematibus Propoſitionum XI. & XII. deducuntur utrique præcedenti ſunt præferendæ; quia quæ Radices imaginariæ poſſunt cognoſci Propoſitionibus VII. & IX, hæ ſemper patebunt per Propoſitiones XI. & XII, & ſæpe per has Propoſitiones deteguntur Radices impoſſibiles, quæ non apparent, ſi Æquationes per Propoſitiones VII. & IX. tantum examinentur. Utilitas, quam habent Regulæ ex Prop. XI. deductæ, præ illis, quæ ex præcedentibus deducuntur, plane patebit, ſi conſideretur, quod per Prop. XI. habemus Valores Quantitatum a', b', c', d', e' ſeparatim, cum per Propoſitiones præcedentes habeamus tantum valores quarundam ſummarum earundem Quantitatum eodem ſigno unitarum. Jam facile patet, quod ſi hæ Quantitates ſeparatim ſumtæ inveniantur poſitivæ, aggregatum quodcunque quarumvis illarum quantitatum debet etiam eſſe poſitivum; ſed illud aggregatum poteſt eſſe poſitivum, licet quædam ex hiſce Quantitatibus, a', b', c', d', e' ſint negativæ: Unde ſequitur ſi Radices Æquationis afficiantur omnes eodem ſigno, nullaque appareat per Prop. XI. Radix impoſſibilis, nullam quoque apparere per Propoſitiones præcedentes; quasdam vero Radices imaginarias per XI. detegi poſſe ubi nullæ per propoſitiones quæ hanc præcedunt apparent. Si quædam Æquationis Radices ſint poſitivæ, & quædam negativæ, (quod facile patebit conſiderando ſigna Terminorum) tunc in multis Caſibus XII. Propoſitio utilior erit ad detegendas Radices imaginarias, quam quævis ex præcedentibus.

Regula, quæ ſequitur ex primo Theoremate Prop. XII. locum habet, ſive Radices Æquationis diverſis afficiantur ſignis, ſive eodem. Multiplicetur Numerus, qui exprimit, quot Termini in Æquatione datum Terminum, ut Ex^{n-r}, præcedunt, per Numerum Terminorum qui ſequuntur in eadem Æquatione, dicaturque Productum illud m; ſintque $+D$, $-C$, $+B$, $-A$, $+1$ Coefficientes Terminorum, qui præcedunt ipſum Ex^{n-r}, ſintque $+F, -G, +H, -I, +K$, Coefficientes Terminorum ſequentium; ſi $\frac{1}{2} m E^2$ non ſit majus quam $\overline{m+1} \times DF - \overline{m+4} \times CG + \overline{m+9} \times BH - \overline{m+16} \times AI + \overline{m+25} \times K$, Æquatio habebit aliquas Radices imaginarias; Coefficientes $m+1$, $m+4$, $m+9$, &c. oriuntur

ad-

addendo ipſi m Quadrata numerorum 1, 2, 3, 4, &c., qui denotant diſtantias Coefficientium, a Coefficiente E. Secundum Theorema Prop. XII. oſtendit, quod ſi $\frac{3}{8}\, m' E^2$ non ſit majus quam $m' DF - \overline{m' - 12} \times CG + \overline{m' - 72} \times BH - \overline{m' - 240} \times AI + \overline{m' - 600} \times K$ Æquatio habebit aliquas Radices imaginarias. Exempli Gratia

Si quatuor Radices Æquationis Quadrato-quadraticæ, ut $x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0$ ſint Quantitates Reales, deduci poteſt ex quavis Propoſitionum V, VII, IX, & XI, quod $\frac{3}{8} A^2$ debet eſſe majus quam B, & $\frac{3}{8} C^2$ majus quam BD. Prop. VII ulterius oſtendit, quod $\frac{1}{3} B^2$ debet eſſe majus quam $AC - D$; nona demonſtrat, quod $\frac{4}{9} B^2$ debet excedere AC; ſed Regula noſtra, deducta ex Prop. XI. oſtendit quod $2B^2$ debet excedere $5AC - 8D$, cum exceſſus ſit $\frac{1}{2} a'$, & Regula deducta ex ſecundo Theoremate Prop. XII. oſtendit, quod B^2 debet ſemper eſſe majus quam $2AC + 4D$, cum exceſſus ſit $\frac{1}{4} a''$. Patet ex plurimis præcedentibus Propoſitionibus, quod ſi Radices Æquationis habeant omnes idem ſignum AC debet eſſe majus quam 16 D: ſint dicti exceſſus $5B^2 - 12AC + 12D = p$, $4B^2 - 9AC = q$, $AC - 16D = s$. patet, quod a' $(= 4B^2 - 10AC + 16D) = q - s = \frac{2}{5} \times \overline{2p - s}$, & quod $a'' = q + s = \frac{2}{5} \times \overline{2p + 4s}$. Ponamus nunc,

1. Quod s eſt poſitivum, & patebit, quod ſi ſit vel p, vel q negativum a' debet etiam eſſe negativum; per conſequens ubi VII. vel IX. Propoſitio oſtendit Radices aliquas eſſe imaginarias, Prop. XI. eaſdem quoque detegit; ſed quia a' $(= q - s = \frac{2}{5} \times \overline{2p - s})$. poteſt inveniri negativum, ubi tamen p & q eſt utrumque poſitivum, ſequitur, quod Regulâ, ex Prop. XI. deductâ, poſſumus in data Æquatione detegere Radices imaginarias, quæ per Propoſitiones præcedentes non apparent; ſic ſi per NEWTONI Regulam, vel per Prop. VII. examinemus hanc Æquationem, $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 7x + 1 = 0$, nulla apparebit radix imaginaria; ſed cum $2B^2 - 5AC + 8D$ $(= \frac{1}{2} a') = 200 - 210 + 8 = -2$ ſit in hac Æquatione negativum, patet duas hic dari Radices imaginarias. Ponamus

2. Quod s ſit negativum, & quod pateat ex ſignis Æquationis aliquas Radices eſſe poſitivas, aliquas negativas; in hoc caſu, ut ſciamus

mus an Æquatio habeat Radices imaginarias, utiliſſima eſt Regula quam deduximus ex 2 Theor. Prop. XII; ſcilicet, quod, ſi B^2 non ſit majus quam $2\,AC+4\,D$, quædam Æquationis Radices debent eſſe imaginariæ; cum enim exceſſus ipſius B^2 ſupra $2\,AC+4\,D$ ſit $=\frac{1}{4}a'' = \frac{1}{4}\times\overline{q+s} = \frac{1}{12}\times\overline{2p+4s}$, atque s ſit negativum, manifeſtum eſt, quod ſi q vel p ſit negativum $\frac{1}{4}a''$ debet eſſe negativum; poteſt etiam $\frac{1}{4}a''$ eſſe negativum, licet utrumque p & q ſit poſitivum: Hæc itaque Regula ſemper deteget, quasdam dari Radices imaginarias, ſi quædam detegantur per Prop. VII. vel IX.; & ſæpe ubi per haſce Propoſ. nullæ tales deteguntur Radices, quædam tamen deteguntur per dictam Regulam. Exem. gr. Si examinetur hæc Æquatio $x^4+5x^3+6x^2-x-12=0$ nullæ detegentur Radices imaginariæ per Prop. VII. vel IX, & licet $AC-16D$ $(=s)$ ſit negativum, non tamen inde ſequitur dari in Æquatione Radices impoſſibiles, quia patet ex ſignis Terminorum Radices hujus Æquationis diverſis affici ſignis; ſed quia $B^2-2\,AC+4\,D$ $(=36+10-48=-2)$ eſt negativum, patet per noſtram Regulam hanc Æquationem habere aliquas Radices imaginarias.

Poſſem oſtendere præterea, quomodo ope Regularum ex Propoſitionibus XI. & XII. deductarum detegi poſſit, num Æquatio habeat plus quam duas radices impoſſibiles, & in genere, quomodo hiſce Regulis determinetur numerus Radicum inpoſſibilium; ſed ut hoc ſtricte demonſtretur, longa nimis explicatione, & quibusdam Lemmatibus indigerem: hoc tantum obſervandum, quod hæ propoſitiones XI. & XII. utiliſſimæ invenientur inter omnes, quas in hunc uſum explicavi; Ex. gr. ſi Æquatio hæc $x^4-4ax^3+6a^2x^2-4ab^2x+b^4=0$

$$\begin{matrix} + & - & + & - & + \end{matrix}$$

examinetur per Regulam NEWTONI, invenietur habere quatuor Radices impoſſibiles, ſi a ſit majus quam b; licet enim Quadratum ſecundi Termini ductum in fractionem $\frac{3}{8}$ ſit æquale Producto ex primo & tertio Termino, in hoc caſu tamen ſignum — ponendum eſt ſub ſecundum Terminum. Idem dicendum de quarti Termini Quadrato.

Regula deducta ex Prop. VII. oſtendit quatuor dari Radices imagi-

ginarias, ſi a ſit majus quam b, vel ſi b^2 ſit majus quam $15a^2$. Sed Regula deducta ex Prop. XI. oſtendit quatuor Radices eſſe ſemper imaginarias, ubi a eſt majus quam b, vel b^2 majus quam $9a^2$; unde patet Regulæ hujus excellentia præ duabus hiſce aliis. Tam multa dixi de Æquationibus Quadrato-quadraticis, ut obſervationes, quæ in Æquationes plurium Dimenſionum fieri poſſunt, iis relinquere cogar, qui hoc ſibi penſum inponere volent.

Dum præcedentes Propoſitiones inveſtigarem, ſupputationes tam intricatas mihi fuit iucundum, ut ſæpe conatus fuerim faciliorem detegere Methodum hanc tractandi Materiam. Hæc, quæ ſequitur multum mihi profuit, nec tibi forte injucunda videbitur; per hanc *maxima* quædam inveſtigo facillima via, quæ vulgari Methodo non ita commode poſſent demonſtrari.

Lemma V. Data linea AB in duas partes ad libitum ſecta ut in P, dico Rectangulum ex Partibus AP & PB fore maximum, ſi hæ partes ſint æquales. Patet ex Elementis *Euclidis*.

A — P — B

Lemma VI. Si linea AB dividatur in Partes quotcunque AC, CD, DE, EB, Productum ex omnibus hiſce partibus erit *maximum*, ubi hæ Partes ſunt æquales inter ſe.

Sit enim punctum D ubi placeat, manifeſtum eſt, quod ſi DB ſecetur in duas Partes æquales in E, Productum AC × CD × DE × EB majus erit, quam AC × CD × De × eB, quia per Lemma præcedens DE × EB majus eſt quam De × eB; eandem ob rationem AD & CE debent æqualiter ſecari in C & D, per conſequens neceſſe eſt ut omnes Partes AC, CD, DE, EB ſint omnes æquales, ut productum ex iis omnibus ſit *maximum*.

A C D E e B

Lemma VII. Summa productorum, quæ fieri poſſunt ex binis Partibus ipſius AB eſt *maxima*, ubi hæ Partes ſunt æquales. Summa horum Productorum eſt AC × CB, + CD × DB + DE × EB: Jam ut DE × EB ſit *maximum* DB debet æqualiter ſecari in E per Lem. V. eandem ob cauſam AD & CE debent æqualiter ſecari in

C & D, ideſt omnes Partes AC, CD, DE, EB debent eſſe æquales, ut ſumma omnium horum Productorum ſit *maxima*.

Lemma VIII. Summa Productorum ex ternis Partibus lineæ AB eſt *maxima*, ubi omnes partes ſunt æquales; hæc ſumma eſt $AC \times CD \times DE + EB \times \overline{AC \times CD + AC \times DE + CD \times DE}$; ſit punctum E datum, manifeſtum eſt, quod AE debet æqualiter ſecari in C & D ut $AC \times CD \times DE$ ſit *maximum* per Lem. VI. & ut $AC \times CD + AC \times DE + CD \times DE$ ſit *maximum* per Lem. VII. Unde ſequitur, quod omnes hæ Partes AC, CD, DE, EB debent eſſe æquales, ut ſumma Productorum ex ternis illis ſit maxima.

Lemma IX. Manifeſtum eſt hanc ratiocinandi Methodum eſſe generalem, &c, quod ſi ſumma quarumvis Quantitatum ſit data, ſumma omnium Productorum, quæ fieri poſſunt multiplicando datum illarum numerum inter ſe, debet eſſe *maxima*, ubi hæ Quantitates ſunt æquales; ſed ſumma Quadratorum, Cuborum, vel in genere, ſingularum harum Quantitatum ad quamvis potentiam elevatarum, eſt *minima* ubi hæ Quantitates ſunt æquales.

THEOREMA.

Ponamus $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - Ex^{n-5} + \&c. = 0$ *eſſe Æquationem cujus omnes Radices non ſunt æquales, exprimat* r *Dimenſionem alicujus Coefficientis, ut ipſius* D, *ſitque* $l = n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4}$ *&c. tot ſumendo factores, quot dantur unitates in* r. *erit ſemper* $\frac{1}{n^r} \times A^r$ *majus quam* D, *ſi Radices Æquationis ſint Quantitates Reales, eodem ſigno affectæ.*

Hoc poteſt demonſtrari per Prop. præcedentes; ſed ut demonſtremus per poſtrema Lemmata, ſumamus Æquationem, cujus omnes Radices ſint æquales, illarumque Radicum ſumma = A ſummæ Radicum Æquationis propoſitæ, Æquatio aſſumta erit $\overline{x - \frac{1}{n}A}^n = 0$, vel $x^n - Ax^{n-1} + n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{A^2}{n^2} x^{n-2} - n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{A^3}{n^3} x^{n-3} \&c. = 0$;

&

& ſi r exprimat dimenſionem Coefficientes alicujus Termini hujus Æquationis (ideſt numerum Terminorum, qui illum Coefficientem præcedunt) manifeſtum eſt quod ipſe Terminus erit $l \times \frac{A^r}{n^r} \times x^{n-r}$; ſed per ſuppoſitionem Dx^{n-r} eſt Terminus correſpondens in Æquatione Propoſita, & D debet eſſe ſumma omnium Productorum, quæ fieri poſſunt multiplicando tot Radices Æquationis inter ſi, quot dantur unitates in r. & $\frac{lA^r}{n^r}$ debet eſſe ſumma ſimilium Productorum, ex Radicibus Æquationis aſſumtæ, quæ ultima ſumma maxima eſt, per Lem: præcedens, quia Æquationis aſſumtæ radices ſunt omnes æquales, earumque ſumma æqualis ſummæ Radicum Æquationis propoſitæ, & ſumma ejuſmodi Productorum eſt maxima, ubi quantitates ſunt æquales inter ſe.

Sequendo eandem Methodum poteſt demonſtrari, quod $\overline{\frac{2B\times}{n\times\overline{n-1}}}\Big|^{\frac{r}{2}} \times l$ ſemper majus eſſe debet quam Coefficiens termini x^{n-r} in Æquatione, cujus Radices ſunt Quantitates reales, eodem ſigno affectæ, dummodo r ſit numerus major quam 2. Eodem modo $\overline{\frac{2\times 3C}{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}}}\Big|^{\frac{r}{3}} \times l$ debet eſſe majus dicto Coefficente, ſi r ſit Numerus major quam 3. Hæc Theoremata facile poſſunt continuari.

Tertia Methodus, de qua initio hujus epiſtolæ mentionem feci, deducitur ex conſideratione Limitum Radicum Æquationis, & licet, quod ad hos Limites adtinet, jam ab aliis auctoribus fuerit explicatum, quia tamen illud diverſa via demonſtro, atque huic materiæ applico, breviter hujus Methodi dabo rationem.

Lem. X. Si transformetur Æquatio Quadrato-quadratica $x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0$, in aliam quæ habeat omnes ſuas Radices reſpective minores valoribus ipſius x, datâ Quantitate e, ponendo $y = x - e$, vel $y + e = x$, Æquatio Transformata, inverſo Terminorum ordine, hanc induet formam.

$$\begin{array}{llllllllll}
e^4 & + & 4e^3y & + & 6e^2y^2 & + & 4ey^3 & + & y^4 = 0 \\
-Ae^3 & - & 3Ae^2y & - & 3Aey^2 & - & A \\
+Be^2 & + & 2Bey & + & By^2 \\
-Ce & - & Cy \\
+D
\end{array}$$

Ubi manifeſtum eſt

1°. Quod primus Terminus $e^4 - Ae^3 + Be^2 - Ce + D$, eſt Quantitas, quæ oritur ſubſtituendo e pro x in Æquatione propoſita, $x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D$.

2°. Quod Coefficiens ſecundi Termini $4e^3 - 3Ae^2 + 2Be - C$ eſt Quantitas, quæ oritur multiplicando unamquamque partem primæ $e^4 - Ae^3 + Be^2 - Ce + D$ per indicem ipſius e in illa parte, & dividendo Productum per e.

3°. Coefficiens tertii Termini $6e^2 - 3Ae + B$ oritur ex præcedente, $4e^3 - 3Ae^2 + 2Be - C$ multiplicando unamquamque partem per indicem ipſius e, & dividendo productum per $2e$.

4. Coefficiens quarti Termini oritur eodem modo ex præcedente, ubi Productum dividendum eſt per $3e$. Et in genere Coefficiens cujusvis Termini deduci poteſt ex Coefficiente Termini præcedentis, multiplicando unamquamque partem per indicem ipſius e, & dividendo Productum per e, & per indicem ipſius y in Termino, qui quæritur.

Lemma XI. ſi quævis Æquatio transformetur eodem modo, ut $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \&c. = 0$, ſupponendo $y = x - e$, vel $x = e + y$, & per conſequens $x^n = \overline{e+y}^n$, $Ax^{n-1} = A \times \overline{e+y}|^{n-1}$, $Bx^{n-2} = B \times \overline{e+y}|^{n-2}$ &c. Æquatio transformata, inverſo Terminorum ordine hanc induet formam.

$$\begin{array}{lllll}
e^n & + & n \times e^{n-1}y & + & n \times \frac{n-1}{2} e^{n-2} y^2 \ \&c. \\
-Ae^{n-1} & - & \overline{n-1} \times Ae^{n-2}y & - & \overline{n-1} \times \frac{n-2}{2} Ae^{n-3}y^2 \ \&c. \\
+Be^{n-2} & + & \overline{n-2} \times Be^{n-3}y & + & \overline{n-2} \times \frac{n-3}{2} Be^{n-4}y^2 \ \&c. \\
-Ce^{n-3} & - & \overline{n-3} \times Ce^{n-4}y & - & \overline{n-3} \times \frac{n-4}{2} Ce^{n-5}y^2 \ \&c. \\
\&c. & & \&c. & & \&c.
\end{array}$$

Ubi

Ubi patet

1°. Quod Primus Terminus $e^n - Ae^{n-1} + Be^{n-2} - Ce^{n-3}$ &c. eſt Quantitas, quæ oritur ſubſtituendo e loco ipſius x in Æquatione $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3}$ &c.

2°. Quod Coefficiens ſecundi Termini $ne^{n-1} - \overline{n-1}\,Ae^{n-2} + \overline{n-2}\,Be^{n-3} - \overline{n-3}\,Ce^{n-4}$ &c. deducitur ex præcedente, multiplicando quasvis ejus partes per indicem ipſius e in illa parte, & dividendo productum per e,

3°. Quod Coefficiens tertii Termini deducitur ex Coefficiente ſecundi, multiplicando eodem modo quamvis ejus partem per indicem ipſius e in illa parte, & dividendo per $2e$. In genere, Coefficiens cujusvis Termini, ut y^r, deducitur ex Coefficiente Termini præcedentis, videlicet y^{r-1}, multiplicando quamvis partem hujus Coefficientis, per indicem ipſius e in illa parte, & dividendo productum per re, id eſt per e ductum in indicem ipſius y.

Lemma XII. Si ſubſtituantur per vices duæ quælibet Quantitates K & L loco ipſius x in Æquatione $x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0$, & Quantitates, quæ ex hiſce ſubſtitutionibus oriuntur ſint affectæ diverſis ſignis, erunt K & L limites unius vel plurium Radicum realium Æquationis propoſitæ; ideſt una harum Quantitatum debet eſſe major altera minor, quam una aut plures Radices reales hujus Æquationis.

Si enim ſupponas a, b, c, d eſſe Radices hujus Æquationis, patet, ex Æquationum Geneſi, quod $x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = \overline{x-a} \times \overline{x-b} \times \overline{x-c} \times \overline{x-d}$; ideoque ſi ſubſtituatur K & L pro x, in $\overline{x-a} \times \overline{x-b} \times \overline{x-c} \times \overline{x-d}$, productum ſit in uno caſu poſitivum, & in altero negativum, ſequitur quod unus ex dictis factoribus, ſi K pro x ſubſtituatur debet habere ſignum diverſum ab eo, quod habet, ſi L pro x ſubſtituatur; ponamus illum factorem eſſe $x - b$, cum $K - b$, & $L - b$ ſint Quantitates, quarum una eſt poſitiva, & altera negativa, ſequitur quod b una e Radicibus Æquationis debet eſſe minor quam una, & major quam altera harum Quantitatum K & L. Ideſt K & L erunt limites hujus Radicis.

 Dico

Dico porro, quod Radix cujus K & L ſunt Limites debet eſſe Radix realis propoſitæ Æquationis. Producti enim ex factoribus, qui Radices impoſſibiles continent in Æquatione nunquam poteſt ſignum mutari, quævis Quantitas Realis ſubſtituatur pro x, quia numerus ejusmodi Radicum ſemper eſt par; & Productum e duabus talibus Radicibus, ut $\overline{x - m - \sqrt{-n^2}} \times \overline{x - m + \sqrt{-n^2}}$ eſt $\overline{x - m}^2 + n^2$, quod ſemper eſt poſitivum, Quæcunque Quantitas pro x ſubſtituatur, dum n^2 manet poſitivum, id eſt, dum hæ duæ Radices manent impoſſibiles.

Lemma XIII. Si ſubſtituantur K & L per vices pro x in Æquatione $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2}$ &c, & quantitates, quæ inde oriuntur, diverſis afficiantur ſignis, erunt K & L limites unius vel plurium Radicum Æquationis propoſitæ: hoc Lemma eodem modo ac præcedens poteſt demonſtrari.

Theorema I. Si a, b, c, d ſint Radices Æquationis $x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = o$, erunt hæ Limites Æquationis $4x^3 - 3Ax^2 + 2Bx - C = o$.

Ponamus a eſſe minimam e Radicibus Æquationis Quadrato-quadraticæ $x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = o$. b ſecundam, c tertiam, d quartam erunt valores ipſius y in Æquatione Lemmatis X $a - e$, $b - e$, $c - e$, $d - e$; deinde ſubſtituendo ſucceſſive a, b, c, d pro e in dicta Æquatione ipſius y, unus e valoribus hujus evaneſcet in una quaque ſubſtitutione; & primo Termino Æquationis ipſius y, videlicet $e^4 - Ae^3 + Be^2 - Ce + D$, evâneſcente, Æquatio reducetur ad Cubicam hûjus formæ, $4e^3$

$$\begin{aligned} &4e^3 + 6e^2y + 4ey^2 + y^3 = o. \\ &- 3Ae^2 - 3Aey - Ay^2 \\ &+ 2Be + B \\ &- C \end{aligned}$$

Per conſequens $4e^3 - 3Ae^2 + 2Be - C$ debet eſſe Productum ex reliquis tribus Radicibus ipſius y, mutato ſigno; id eſt hoc productum debet eſſe Æquale $- \overline{b - a} \times \overline{c - a} \times \overline{d - a}$, quando e ſupponitur Æquale a; debet eſſe $- \overline{a - b} \times \overline{c - b} \times \overline{d - b}$, quando $e = b$; debet eſſe $- \overline{a - c} \times \overline{b - c}$

$\times \overline{b-c} \times \overline{d-c}$ quando $e=c$; tandem debet eſſe $-\overline{a-d} \times \overline{b-d}$ $\times \overline{c-d}$ quando $e=d$. Jam patet, quod hæc producta $\overline{b-a} \times \overline{c-a}$ $\times \overline{d-a}$, $\overline{a-b} \times \overline{c-b} \times \overline{d-b}$, $\overline{a-c} \times \overline{b-c} \times \overline{d-c}$, $\overline{a-d}$ $\times \overline{b-d} \times \overline{c-d}$, debent affici reſpective ſignis $+$, $-$, $+$, $-$; cum primum ſit productum ex tribus Quantitatibus poſitivis; ſecundum, ex una negativa & duabus poſitivis; tertium ex duabus negativis & una poſitiva; quartum ex tribus negativis: ideo, cum ſubſtituendo a, b, c, d, per vices pro e in Quantitate $4e^3-3Ae^2$ $+2Be-C$, hæc Quantitas alternatim fiat poſitiva & negativa, ſequitur ex ultimo Lemmate, a, b, c, d eſſe Limites Æquationis $4e^3-3Ae^2+2Be-C=o$, vel $4x^3-3Ax^2+2Bx-C=o$.

COR. Sequitur ex hoc Theoremate, quod ſi a', b', c' ſint Radices Æquationis $4e^3-3Ae^2+2Be-C=o$, debent eædem eſſe limites inter a, b, c, d Radices Æquationis Quadrato-quadraticæ $x^4-Ax^3+Bx^2-Cx+D=o$; ſi enim a, b, c, d ſint Limites Radicum a', b', c', debent reciprocè hæ eſſe Limites inter a, b, c, & d.

Theorema II. Multiplicentur Termini Æquationis cujusvis Quadrato-quadraticæ, ut $x^4-Ax^3+Bx^2-Cx+D=o$, per Arithmeticam ſeriem Quantitatum $l+4m$, $l+3m$, $l+2m$, $l+m$, l, erunt Radices Æquationis propoſitæ limites Radicum Æquationis, quæ ex dicta multiplicatione oritur, ideſt hujus Æquationis

$$\begin{array}{l} lx^4 - lAx^3 + lBx^2 - lCx + lD=o. \\ +4mx^4 - 3mAx^3 + 2mBx^2 - mCx \end{array}$$

ponamus enim, quod ſubſtituendo a, b, c, d, Radices Æquationis datæ $x^4-Ax^3+Bx^2-Cx+D=o$ ſucceſſive pro x in $4x^3$ $-3Ax^2+2Bx-C$, Quantitates quæ inde oriuntur ſint $-R$, $+S$, $-T$, $+Z$; ſi eædem ſubſtituantur in Æquatione

$$\begin{array}{l} lx^4 - lAx^3 + lBx^2 - lCx + lD=o, \\ +4mx^4 - 3mAx^3 + 2mBx^2 - mCx \end{array}$$

cum evaneſcat, in quavis ſubſtitutione $lx^4-lAx^3+lBx^2-lC$ $x+lD$ patet evidenter, quod reliquum evadet ſucceſſive æquale $-mRx$, $+mSx$, $-mTx$, $+mZx$; ubi, cum ſigna harum Quantitatum ſint alternatim Negativa & poſitiva, patet a, b, c, d eſſe limites ultimæ Æquationis, per Lem. XII. COR.

Digitized by Google

COR. Hinc ſequitur $a, b, c,$ & d eſſe limites Æquationis Cubicæ $Ax^3 - 2Bx + 3Cx - 4D = o$. & converſim Radices hujus Cubicæ eſſe limites Radicum Æquationis Quadrato-quadraticæ $x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = o$; nam multiplicando hanc Quadrato-quadraticam Æquationem per Progreſſionem Arithmeticam, $o, -1, -2, -3, -4$, oritur hæc Cubica $Ax^3 - 2Bx^2 - 3Cx + 4D = o$.

Theorema III. In genere, Radices Æquationis $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \&c. = o$, ſunt Limites Radicum Æquationis $nx^{n-1} - \overline{n-1} \times Ax^{n-2} + \overline{n-2} \times Bx^{n-3}\ \&c = o$, vel cujusvis Æquationis, quæ deducitur ex prima, multiplicando ipſius Terminos per quamvis Arithmeticam Progreſſionem, ut $l \mp d,\ l \mp 2d,\ l \mp 3d$, &c; & converſim Radices hujus novæ Æquationis erunt Limites Radicum Æquationis Propoſitæ,
$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - \&c. = o$.

Hujus Theorematis demonſtratio deducitur ex Lemmatibus XI. & XIII, eodem modo, quo præcedentia Theoremata deducta fuere ex Lemmatibus X, & XII. atque per hæc Theoremata facile pervenitur ad ea, quæ ſuper hac materia tractantur ab Algebraicis ſcriptoribus.

Theorema IV. Æquatio $x_n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \& = o$, tot habebit Radices imaginarias, quot dantur in Æquatione $nx^{n-1} - \overline{n-1} \times A^{n-2} + \overline{n-2} \times Bx^{n-3}\ \&c. = o$, vel in Æquatione $Ax^{n-1} - 2Bx^{n-2} + 3Cx^{n-3} - \&c. = o$.

Ponas aliquam Radicem Æquationis $nx^{n-1} - \overline{n-1}\ Ax^{n-2} + \overline{n-2}\ Bx^{n-3}\ \&c. = o$, ut p, fieri imaginariam; duæ Radices Æquationis $x^n - Ax^{n-1} Bx^{n-2}\ \&c. = o$, quæ hujus p ſunt limites, non poſſunt ambæ eſſe Quantitates reales; patet enim ex demonſtratione Theorematis 1, ſi hæ Radices ſint Quantitates reales, & ſubſtituantur pro x in $n\,x^{n-1} - \overline{n-1} \times Ax^{n-2} + \overline{n-2} \times Bx^{n-3}$ &c, Quantitates, quæ inde orientur contrariis debere affici ſignis, & per conſequens Radix p, cujus illæ ſunt Limites debet eſſe Radix realis, contra ſuppoſitionem; idem locum habet, ſi agatur de Æquatione $Ax^{n-1} - 2Bx^{n-2} + 3Cx^{n-3} - \&c. = o$, eandem ob Rationem.

COR. 1. Æquatio Quadrato-quadratica, $x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = o$

Digitized by Google

$+ D = 0$ duas habebit Radices imaginarias, ſi duæ dentur tales in Æquatione $4x^3 - 3Ax^2 + 2Bx - C = 0$; vel in Æquatione $Ax^3 - 2Bx^2 + 3Cx - 4D = 0$. Sed duæ Radices Æquationis $4x^3 - 3Ax^2 + 2Bx - C = 0$, ſunt imaginariæ, ſi ſint imaginariæ ambæ Radices Æquationis Quadraticæ $6x^2 - 3Ax + B = 0$, vel Æquationis $3Ax^2 - 4Bx + 3C = 0$, quia Radices harum Æquationum Quadraticarum ſunt limites illius Cubicæ Æquationis, per Theor. 111; Eandem ob cauſam duæ Radices Æquationis $Ax^3 - 2Bx^2 + 3Cx - 4D = 0$ erunt imaginariæ ſi ſint impoſſibiles Radices Quadraticæ $3Ax^2 - 4Bx + 3C = 0$, vel hujus $Bx^2 - 3Cx + 6D = 0$. Ideo duæ ex Radicibus Æquationis $x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0$ erunt imaginariæ, quando Radices harum Quadraticarum $6x^2 - 3Ax + B = 0$, $3Ax^2 - 4Bx + 3C = 0$, $Bx^2 - 3Cx + 6D = 0$ evadunt impoſſibiles, id eſt, per Prop. I. quando $\frac{3}{8}A^2$ minus eſt quam B, vel $\frac{4}{9}B^2$, minus quam AC, vel $\frac{3}{8}C^2$ minus quam BD.

COR. II. Procedendo eodem modo ex quavis Æquatione, ut $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3}$ &c. $= 0$, tot poſſunt deduci Æquationes Quadraticæ, quot dantur Termini in Æquatione propoſita, primo & ultimo exceptis: & omnium harum Æquationum Quadraticarum Radices debent eſſe reales, ſi propoſita nullas habeat imaginarias: Quadratica deducta ex tribus primis Terminis, $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2}$, habebit hanc formam, $n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2} \times \overline{n-3}$ &c. $\times x^2 - \overline{n-1} \times \overline{n-2} \times \overline{n-3} \times \overline{n-4}$ &c. $\times Ax + \overline{n-2} \times \overline{n-3} \times \overline{n-4} \times \overline{n-5}$ &c. $\times B$, continuando ſeriem factorum donec tot dantur, quot dantur unitates in $n - 2$: deinde dividendo Æquationem per factores $n-2$, $n-3$, &c. qui in quovis Coefficiente apparent, Æquatio evadet ejusmodi, $n \times \overline{n-1} \times x^2 - \overline{n-1} \times 2Ax + 2 \times 1 \times B = 0$; Cujus Radices erunt imaginariæ, per Prop. I, quando $n \times \overline{n-1} \times 2 \times 4B$ majus eſt quam $\overline{n-1}^2 \times 4A^2$, vel quando B majus eſt quam $\frac{n-1}{2n}A^2$; ita ut propoſita Æquatio debeat habere aliquas Radices imaginarias, ſi ſit B majus quam $\frac{n-1}{2n}A^2$, ut demonſtratum fuit alio modo in Prop. V^{ta}.

Digitized by Google

Quadratica Æquatio eodem modo deducta ex tribus primis Terminis Æquationis $Ax^{n-1} - 2Bx^{n-2} + 3Cx^{n-3}$ &c $= 0$; hanc induet formam $\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}$ &c. $\times Ax^2 - \overline{n-2}\times\overline{n-3}\times\overline{n-4}$ &c. $\times 2Bx + \overline{n-3}\times\overline{n-4}\times\overline{n-5}$ &c. $\times 3C = 0$; Quæ, dividendo per factores communes cuivis Termino, reducitur ad hanc $\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times Ax^2 - \overline{n-2}\times 4Bx + 6C = 0$; cujus Radices erunt imaginariæ, quando $\frac{2}{3}\times\frac{n-2}{n-1}\times B^2$ minus eſt quam AC; ideoque in hoc caſu, quædam e Radicibus Æquationis Propoſitæ erunt etiam imaginariæ.

COR. III. In Genere ſint $Dx^{n-r+1} - Ex^{n-r} + Fx^{n-r-1}$ utcunque tres Termini Æquationis $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2}$ &c $= 0$, ſe mutuo ſequentes; multiplicentur hujus Æquationis Termini primo per Progreſſionem n, $n-1$, $n-2$ &c. Deinde per $n-1$, $n-2$, $n-3$ &c, tum per $n-2$, $n-3$, $n-4$ &c, donec multiplicaveris per tot Progreſſiones, quot dantur unitates in $n-r-1$; Porro Termini, qui ex primis multiplicationibus oriuntur, multiplicentur toties per Progreſſionem 0, 1, 2, 3 &c, quoties unitas datur in $r-1$ & pervenietur tandem ad Quadraticam Æquationem hujus formæ

$$\overline{n-r+1}\times\overline{n-r}\times\overline{n-r-1}\times\overline{n-r-2}\text{ \&c.}\times\overline{r-1}\times\overline{r-2}\times\overline{r-3}\times\overline{r-4}\times\text{\&c.}\times Dx^2$$
$$-\ \overline{n-r}\times\overline{n-r-1}\times\overline{n-r-2}\times\overline{n-r-3}\text{ \&c.}\times r\times\overline{r-1}\times\overline{r-2}\times\overline{r-3}\text{ \&c.}\times Ex +$$
$$\overline{n-r-1}\times\overline{n-r-2}\times\overline{n-r-3}\times\overline{n-r-4}\text{ \&c.}\times\overline{r+1}\times r\times\overline{r-1}\times\overline{r-2}\text{ \&c.}\times F = 0.$$

& dividendo per factores $n-r-1$, $n-r-2$ &c. & $r-1$, $r-2$ &c. qui in quovis Coefficiente dantur, Æquatio ad hanc formam reducetur, $\overline{n-r+1}\times\overline{n-r}\times 2\times 1\times Dx^2 - \overline{n-r}\times 2\times r\times 2Ex + 2\times 1\times\overline{r+1}\times rF = 0$, cujus Radices erunt imaginariæ (per Prop. I.) quando $\frac{n-r}{n-r+1}\times\frac{r}{r+1}\times E^2$ minus eſt quam DF.

Unde patet ſi quivis Terminus hujus ſeriei Fractionum $\frac{n}{1}$, $\frac{n-1}{2}$, $\frac{n-2}{3}$, $\frac{n-3}{4}$ &c. $\frac{n-r+1}{r}$ $\frac{n-r}{r+1}$, $\frac{n-r-1}{r+2}$ &c. dividatur per Terminum proxime antecedentem, & quotientes ponantur ſuper Terminos Æquationis $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2}$ Cx^{n-3} &c. $= 0$, incipiendo a ſecundo Termiro, ſi hoc peracto,

cto, Quadratum cujusvis Termini ductum in Fractionem ſupereminentem inveniatur minus quam Productum ex Terminis adjacentibus, quaſdam hujus Æquationis Radices eſſe imaginarias.

Plura poſſint addi ſuper hanc Materiam, ſed vereor ne putes me jam ea dixiſſe, quæ ſufficiunt, ideo addam tantum demonſtrationem quarundam Regularum Algebraicarum, & quorundam Theorematum quæ facillime ex Lemmate XI. deducuntur.

I. Regula, qua cognoſcitur, num duæ vel plures Radices Æquationis ſint æquales, immediate ſequitur ex dicto Lemmate. Pone duas Radices Æquationis $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3}$ &c. $= o$, eſſe æquales, erunt etiam æquales duo Valores ipſius y, (quod ſemper eſt æquale $x - e$) ponamus e eſſe æquale uni ex duobus Valoribus æqualibus ipſius x, & evaneſcent duo Valores ipſius y; ideoque primus & ſecundus Terminus Æquationis ipſius y in Lem. XI. debent evaneſcere; quia y^2 debet dari in quovis Termino: erunt ergo $e^n - Ae^{n-1} + Be^{n-2} - Ce^{n-3}$ &c. $= o$, & $ne^{n-1} - \overline{n-1} \times Ae^{n-2} + \overline{n-2} \times Be^{n-3}$ &c. $= o$; per conſequens duæ hæ Æquationes habebunt unam Radicem communem, quæ debet eſſe una ex Radicibus ipſius x, quæ æquales ſupponebantur. eſt ergo manifeſtum, quod ubi duo Valores ipſius x ſunt æquales in Æquatione $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2}$ &c. $= o$, illorum unus debet eſſe Radix Æquationis $nx^{n-1} - \overline{n-1} \times Ax^{n-2} + \overline{n-2} \times Bx^{n-3}$ &c. $= o$.

Si tres Valores ipſius x ſupponantur Æquales, inter ſe & ipſi e, tres Valores ipſius y $(= x - e)$ evaneſcent, & tres primi Termini Æquationis ipſius y in Lem. XI. evaneſcent; ideoque erit $n. \times \overline{n-1} \times e^{n-2} - \overline{n-1} \times \overline{n-2} \times Ae^{n-3} + \overline{n-2} \times \overline{n-3} \times Be^{n-4}$ &c. $= o$; & unus ex æqualibus Valoribus ipſius x erit una ex Radicibus hujus ultimæ Æquationis; & duo horum Valorum æqualium erunt inter Radices Æquationis $nx^{n-1} - \overline{n-1} \times Ax^{n-2} + \overline{n-2} \times Bx^{n-3}$ &c. $= o$. In genere ſi Æquatio $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2}$ &c. $= o$ tot habeat Radices æquales, quot dantur unitates in S, tot ex hiſce Radicibus dabuntur in Æquatione $nx^{n-1} - \overline{n-1} \times Ax^{n-2} + \overline{n-2} \times Bx^{n-3}$ &c. $= o$, quot dantur uni-

Digitized by Google

unitates in $S-1$, eodem modo tot erunt ex Valoribus æqualibus in Æquatione $n \times \overline{n-1} \times x^{n-2} - \overline{n-1} \times \overline{n-2} \times Ax^{n-3} + \overline{n-2} \times \overline{n-3} \times Bx^{n-4}$ &c $= 0$, quot dantur unitates in $S-2$, & ſic deinceps.

II. Generalis Regula, quam dedit NEWTONUS in *Articulo de Limitibus Æquationum*, qua invenitur Limes major quovis ex Valoribus ipſius x, immediate deducitur ex Lem. XI. patet enim, quod ſi e talis ſit quantitas, ut poſita in omnibus Coefficientibus ipſius y, videlicet in $e^n - Ae^{n-1} + Be^{n-2}$ &c. $ne^{n-1} - \overline{n-1} \times Ae^{n-2} + \overline{n-2} \times Be^{n-3}$ &c,
$n \times \frac{n-1}{2} e^{n-2} - \overline{n-1} \times \frac{n-2}{2} Ae^{n-3} + \overline{n-2} \times \frac{n-3}{2} Be^{n-4}$ &c,
det omnes quantitates, quæ inde oriuntur, poſitivas, in hoc caſu, cum nulla ſit mutatio ſignorum in Æquatione ipſius y, ſequitur omnes ipſius y Valores eſſe negativos; & cum ſit ſemper $y = x - e$, patet e eſſe quantitatem majorem quovis valore ipſius x, ideſt e debet eſſe majus quavis Radice Æquationis $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3}$ &c. $= 0$.

III Ex eodem Lem. XI. Theoremata quædam utiliſſima circa Methodum Serierum & Fluxionum, & circa Reſolutionem Æquationum facillime deducuntur. Patet enim, quod Coefficiens ſecundi Termini in Æquatione ipſius y in dicto Lemmate eſt fluxio primi Termini diviſa per fluxionem ipſius e; Coefficiens tertii Termini eſt ſecunda fluxio primi diviſa per $2\dot{e}^2$; ponendo e fluere uniformiter; Termini tertii Coefficiens eſt tertia fluxio primi diviſa per $2 \times 3\dot{e}^3$, & ſic deinceps: ideoque ſupponendo $e^n - Ae^{n-1} + Be^{n-2}$ &c. $= c$, Æquatio qua y determinari debet, erit $c + \frac{\dot{c}}{\dot{e}} y + \frac{\ddot{c}}{1 \times 2\dot{e}^2} y^2 + \frac{\dddot{c}}{1 \times 2 \times \dot{e}^3} y^3$ &c. $= 0$. atque inde, quando e eſt propemodum valor ipſius x, Theoremata deduci poſſunt, quibus approximare poſſumus ad y, ac proinde ad x, quod ſupponitur æquale $y + e$.

TAB. XIII. Fig. 5. IV. Sit AP $(= x)$ abſciſſa, PM $(= z)$ ordinata cujusvis Curvæ BLM;

BLM; & ponamus aliam quamcunque abſciſſam $AK = e$, & ordinatam $KL = c$, erit $z (= PM) = c + \frac{\dot{c}}{\dot{e}} y \mp \frac{\ddot{c}}{2\dot{e}^2} y^2 \mp \frac{\dddot{c}}{2 \times 3 \dot{e}^3} y^3$ $+ \frac{\ddddot{c}}{2 \times 3 \times 3 \dot{e}^4} y^4$ &c.

Ponatur enim z æquale cuicunque ſeriei, quæ conſiſtat ex datis Quantitatibus, & potentiis ipſius x, ut $Ax^n + Bx^r + Cx^s$ &c. & ſubſtituendo $e \mp y$ loco ipſius x habebimus eodem modo ac in Lem. XI.

$$z = Ae^n \mp nAe^{n-1} y + n \times \frac{n-1}{2} \times Ae^{n-2} y^2 \text{ \&c.}$$
$$+ Be^r \mp rBe^{r-1} y + r \times \frac{r-1}{2} \times Be^{r-2} y^2 \text{ \&c}$$
$$+ Ce^s \mp sCe^{s-1} y + s \times \frac{s-1}{2} \times Ce^{s-2} y^2 \text{ \&c.}$$
&c. &c. &c.

Sed ubi $x = e$, tunc $z = c = Ae^n + Be^r + Ce^s$ &c. & $\dot{c} = nAe^{n-1}\dot{e}$ $+ rBe^{r-1}\dot{e} + sCe^{s-1}\dot{e}$ &c. $\ddot{c} = n \times \overline{n-1} \times Ae^{n-2}\dot{e}^2 + r \times \overline{r-1} \times Be^{r-2}\dot{e}^2$ $+ s \times \overline{s-1}\, Ce^{s-2}\dot{e}^2$ &c. ideoque $z = c \mp \frac{\dot{c}}{\dot{e}} y + \frac{\ddot{c}}{2\dot{e}^2} y^2 \mp \frac{\dddot{c}}{2 \times 3 \dot{e}^3} y^3$. &c.

Eodem modo invenies $c = z \pm \frac{\dot{z}}{\dot{x}} y + \frac{\ddot{z}}{2\dot{x}^2} y^2 \pm \frac{\dddot{z}}{2 \times 3 \dot{x}^3} y^3 +$ &c. nam $c = Ae^n + Be^r + Ce^s = A \times \overline{x \pm y}|^n + B \times \overline{x \pm y}|^r + C \times \overline{x \pm y}|^s$ &c. $= z \pm \frac{\dot{z}}{\dot{x}} y + \frac{\ddot{z}}{2\dot{x}^2} y^2$ &c. Area KLMP æqualis eſt fluenti ipſius $z\dot{y}$ vel $c\dot{y}$, ſed

$$c\dot{y} = z\dot{y} \pm \frac{\dot{z}}{\dot{x}} y\dot{y} + \frac{\ddot{z}}{2\dot{x}^2} y^2\dot{y} \pm \frac{\dddot{z}}{2 \times 3 \dot{x}^3} y^3\dot{y} \text{ \&c.}$$

& $z\dot{y} = c\dot{y} \mp \frac{\dot{c}}{\dot{e}} y\dot{y} + \frac{\ddot{c}}{2\dot{e}^2} y^2\dot{y} \mp \frac{\dddot{c}}{2 \times 3 \dot{e}^3} y^3\dot{y}$ &c. per conſequens ſumendo fluentes

Digitized by Google

$$KLMP = cy \mp - \frac{\dot{c}}{2c} y^2 + \frac{\ddot{c}}{2 \times 3 c^2} y^3 \mp \frac{\dddot{c}}{2 \times 3 \times 4 c^3} y^4 \text{ \&c. vel}$$

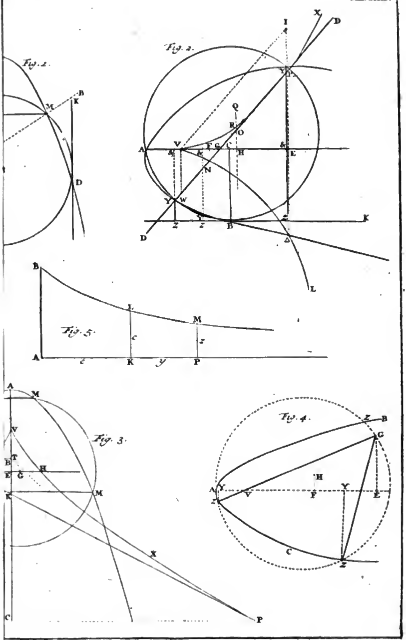
$$KLMP = zy + \frac{\dot{z}}{2x} y^2 + \frac{\ddot{z}}{2 \times 3 x^2} y^3 \pm \frac{\dddot{z}}{2 \times 3 \times 4 x^3} y^4 \text{ \&c.}$$

Hoc ultimum Theorema illud eſt, quod Doctiſſimus Dominus *Bernoulli* in lucem dedit in Actis Lipſienſibus Anni MDCXCIV; ſed jam Tempus eſt longæ huic Epiſtolæ finem imponendi, &c.

METHO-

Digitized by Google

TAB. XIII.



Digitized by Google

Digitized by Google

METHODUS DETERMINANDI

Numerum Radicum impoſſibilium in Æquationibus affectis.

Auctore GEORGIO CAMPBELL.

LEMMA I.

IN omni affecta Æquatione Quadratica, $ax^2 - Bx + A = 0$, cujus Radices ſunt reales, quarta pars Quadrati Coefficientis ſecundi Termini major eſt Rectangulo ex Coefficiente primi Termini & numero abſoluto. ideſt $\frac{1}{4}B^2$ majus eſt quam $a \times A$; & vice verſa ſi ſit $\frac{1}{4}B^2$ majus quam $a \times A$, Radices Æquationis erunt reales; ſed ſi ſit $\frac{1}{4}B^2$ minus quam $a \times A$, Radices erunt impoſſibiles; ſunt enim Radices Æquationis $\frac{\frac{1}{2}B + \sqrt{\frac{1}{4}B^2 - a \times A}}{a}$ & $\frac{\frac{1}{2}B - \sqrt{\frac{1}{4}B^2 - a \times A}}{a}$.

LEMMA II.

Quicunque ſit Numerus Radicum impoſſibilium in Æquatione $x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - Dx^{n-3} + \&c. \pm dx^3 \mp cx^2 \pm bx \mp A = 0$, tot exacte erunt Radices impoſſibiles in Æquatione $Ax^n - bx^{n-1} + cx^{n-2} - dx^{n-3} + \&c. \pm Dx^3 \mp Cx^2 \pm Bx \mp 1 = 0$. Radices enim poſterioris Æquationis reciprocæ ſunt Radicum prioris, ut patet ex vulgari Algebra. Sint Radices Æquationis Quadrato-quadraticæ $x^4 - Bx^3 + Cx^2 - Dx + A = 0$, a, b, c, d, e quibus ſint c, & d impoſſibiles, Radices Æquationis $Ax^4 - Dx^3 + Cx^2 - Bx + 1 = 0$ erunt $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$; ideoque harum duæ $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$, etiam impoſſibiles.

LEM-

LEMMA III.

In omni Æquatione ut $x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - Dx^{n-3} + Ex^{n-4}$ &c. $\pm ex^4 \mp dx^3 \pm cx^2 \mp bx \pm A = 0$, cujus omnes Radices ſunt reales, ſi unusquiſque Terminus multiplicetur per indicem ipſius x, Productumque dividatur per x, Æquatio, quæ inde orietur, $nx^{n-1} - \overline{n-1}\,Bx^{n-2} + \overline{n-2} \times Cx^{n-3} - \overline{n-3} \times Dx^{n-4} + \overline{n-4} \times Ex^{n-5}$ — &c. $\pm 4ex^3 \mp 3dx^2 \pm 2cx \mp b = 0$, habebit etiam omnes Radices ſuas reales. Sic ſi omnes Radices Æquationis $x^4 - Bx^3 + Cx^2 - Dx + A = 0$ ſint reales, erunt etiam reales Radices Æquationis $4x^3 - 3Bx^2 + 2Cx - D = 0$.

Lemma hoc Converſionem non patitur, innumeri enim dantur Caſus ubi Radices Æquationis $nx^{n-1} - \overline{n-1} \times Bx^{n-2} + \overline{n-2} \times Cx^{n-3} - \overline{n-3}\,Dx^{n-4}$ + &c. $\pm 3dx^2 \mp 2cx \pm b = 0$ ſunt reales, cum tamen Æquatio $x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - Dx^{n-3}$ + &c. $\pm dx^3 \mp cx^2 + bx \mp A = 0$ habeat vel aliquas, vel quandoque omnes Radices impoſſibiles. Sed quicunque ſit Numerus Radicum impoſſibilium in Æquatione $nx^{n-1} - \overline{n-1} \times Bx^{n-2} + \overline{n-2} \times Cx^{n-3}$ — &c. $\pm 2cx \mp b = 0$, tot ad minimum erunt Radices impoſſibiles in Æquatione $x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2}$ — &c. $\pm cx^2 \mp A = 0$. Sic omnes Radices Æquationis $4x^3 - 3Bx^2 + 2Cx - D = 0$ poſſunt eſſe reales, & tamen duæ vel forte omnes Radices Æquationis $x^4 - Bx^3 + Cx^2$ $A = 0$ erunt impoſſibiles; ſed ſi duæ Radices Æquationis $4x^3 - 3Bx^2 + 2Cx - D = 0$ ſint impoſſibiles, duæ etiam ad minimum erunt impoſſibiles in Æquatione $x^4 - Bx^3 + Cx^2 - Dx + A = 0$. Hæc omnia fuere demonſtrata ab Algebraicis ſcriptoribus ſpeciatim a Domino *Reyneau* in ſuo Gallico Tractatu cui Titulus eſt *L'Analyſe Demontrée*, & facile apparent per Methodum *de Maximis & Minimis*.

COROL. Sint omnes Radices Æquationis $x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - Dx^{n-3} + Ex^{n-4} - Fx^{n-5}$ + &c. $\pm fx^5 \mp ex^4 + dx^3 \mp cx^2 \pm bx \mp A = 0$ reales, erunt etiam per hoc Lemma Reales omnes Radices Æquationis $nx^{n-1} - \overline{n-1}\,Bx^{n-2} + \overline{n-2}\,Cx^{n-3} - \overline{n-3}\,Dx^{n-4}$

$Dx^{n-4} + \overline{n-4}\,Ex^{n-5} - \overline{n-5}\,Fx^{n-6} +$ &c. $\pm 5fx^4 \mp 4ex^3 \pm 3dx^2 \mp 2cx \pm b = 0.$ idcirco per idem Lemma reales erunt omnes Radices Æquationis $n \times \overline{n-1}\,x^{n-2} - \overline{n-1} \times \overline{n-2}\,Bx^{n-3} + \overline{n-2} \times \overline{n-3}\,Cx^{n-4} - \overline{n-3} \times \overline{n-4}\,Dx^{n-5} + \overline{n-4} \times \overline{n-5}\,Ex^{n-6} - \overline{n-5} \times \overline{n-6}\,Fx^{n-7} +$ &c. $\pm 20fx^3 \mp 12ex^2 \pm 6dx \mp 2c = 0$, vel (dividendo per 2) $n \times \frac{n-1}{2}\,x^{n-2} - \overline{n-1} \times \frac{n-2}{2}\,Bx^{n-1} + \overline{n-2} \times \frac{n-3}{2}\,Cx^{n-4} - \overline{n-3} \times \frac{n-4}{2}\,Dx^{n-5} + \overline{n-4} \times \frac{n-5}{2}\,Ex^{n-6} - \overline{n-5} \times \frac{n-6}{2}\,Fx^{n-7} +$ &c. $\pm 10fx^3 \mp 6ex^2 \pm 3dx \mp c = 0.$ Eodem modo reales erunt omnes Radices Æquationis $n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}\,x^{n-1} - \overline{n-1} \times \frac{n-2}{2} \times \frac{n-3}{3}\,Bx^{n-4} + \overline{n-2} \times \frac{n-3}{2} \times \frac{n-4}{3}\,Cx^{n-1} -$ &c. $\pm 10fx^2 \mp 4ex \pm d = 0.$ & ſic poſſumus deſcendere donec perveniamus ad Æquationem Quadraticam $n \times \frac{n-1}{2}\,x^2 - \overline{n-1} \times Bx + C = 0.$ Eædem Æquationes ſic aſſcendunt

$$n \times \frac{n-1}{2}\,x^2 - \overline{n-1}\,Bx + C = 0$$

$$n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}\,x^3 - \overline{n-1} \times \frac{n-2}{2}\,Bx^2 + \overline{n-2}\,Cx - D = 0.$$

$$n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}\ \frac{n-3}{+}\,x^4 - \overline{n-1} \times \frac{n-2}{2} \times \frac{n-3}{3}\,Bx^3 + \overline{n-2} \times \frac{n-3}{2} \times Cx^3 - \overline{n-3}\,Dx + E = 0.$$

$$n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} \times \frac{n-4}{5}\,x^5 - \overline{n-1} \times \frac{n-2}{2} \times \frac{n-3}{3} \times \frac{n-4}{4} \times Bx^4 + \overline{n-2} \times \frac{n-3}{2} \times \frac{n-4}{3}\,Cx^3 - \overline{n-3} \times \frac{n-4}{2} \times Dx^2 + \overline{n-4}\,Ex - F = 0.$$

& ſic deinceps.

Sit M aliquis ex Coefficientibus Æquationis $x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - Dx^{n-3} + Ex^{n-4} -$ &c. $\pm A = 0.$ ſintque L & N Coef-

 ficien-

ficientes ipſi M adjacentes; ſitque m Exponens Coefficientis M, (per Exponens Coefficientis intelligo numerum, qui denotat locum, quem Coefficiens aliquod occupat inter alia, ſic ſi M repreſentet Coefficiens E ideoque $L=D$, & $N=F$, erit $m=4$.) facile patebit, quod inter præcedentes Æquationes aſcendentes, illa cujus numerus abſolutus eſt N hanc obtinebit formam $n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \&c. \times \frac{n-m}{m+1}$ $x^{m+1} - \overline{n-1} \times \frac{n-2}{2} \times \frac{n-3}{3} \times \&c. \times \frac{n-m}{m} Bx^m + \overline{n-2} \times \frac{n-2}{3}$ $\times \&c. \times \frac{n-m}{m-1} Cx^{m-1} - \&c. \pm \overline{n-m+1} \times \frac{n-m}{2} Lx^2 \mp \overline{n-m}$ $\times Mx \pm N = 0$. Cujus omnes Radices erunt reales, ſi ſint reales Radices Æquationis $x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - \&c. \pm A = 0$. Sit $N=F$, erit $M=E$, $L=D$, & $m=4$. Et Æquatio, cujus numerus abſolutus eſt F, erit $n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} \times \frac{n-4}{5} x^5$ $- \overline{n-1} \times \frac{n-2}{2} \times \frac{n-3}{3} \times \frac{n-4}{4} Bx^4 + \overline{n-2} \times \frac{n-3}{2} \times \frac{n-4}{3}$ $Cx^3 - \overline{n-3} \times \frac{n-4}{2} \times Dx^2 + \overline{n-4} Ex - F = 0$.

PROPOSITIO I.

Sit $x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - Dx^{n-1} + Ex^{n-4} - \&c. \pm ex^4 \mp dx^3$ $\pm cx^2 \mp bx \pm A = 0$ Æquatio cujuſcunque Dimenſionis, cujus omnes Radices ſint reales; ſit M aliquis Coefficiens hujus Æquationis, L & N Coefficientes adjacentes m Exponens ipſius M. Erit Quadratum Coefficientis M ductum in Fractionem $\frac{m \times \overline{n-m}}{\overline{m+1} \times \overline{n-m+1}}$ ſemper majus $L \times N$, Rectangulo ex Coefficientibus adjacentibus; ſic in Æquatione $x^4 - Bx^3 + Cx^2 - Dx + E = 0$, ubi $n=4$, faciendo $M=C$, ideoque $L=B$, $N=D$, & $m=2$, erit $\frac{2 \times \overline{4-2}}{\overline{2+1} \times \overline{4-2+1}} \times C^2$, vel ; C^2 majus quam $B \times D$, dummodo omnes Radices Æquationis ſint reales.

Quia

Quia (per Lem. III.) Radices Æquationis Quadraticæ $n \times \frac{n-1}{2} x^2 - \overline{n-1} B x + C = 0$ ſunt reales, erit (per Lem. I.) $\frac{1}{4} \times \overline{n-1}|^2 \times B^2$ majus quam $n \times \frac{n-1}{2} \times C$, & dividendo utrumque per $\frac{n \times \overline{n-1}}{2}$, erit $\frac{n-1}{2n} \times B^2$ majus quam $1 \times C$; ideoque in Æquatione $x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - Dx^{n-3} + \&c. \pm A = 0$, dimenſionum n, & cujus omnes Radices ſunt reales, Quadratum ipſius B Coefficientis ſecundi Termini, ductum in Fractionem $\frac{n-1}{2n}$ majus eſt quam $1 \times C$ Rectangulum ex Coefficientibus adjacentibus. Sed (per Lem. II.) omnes Radices Æquationis $Ax^n - bx^{n-1} + cx^{n-2} - \&c. \pm Cx^2 \mp Bx \pm 1 = 0$, vel, dividendo per A, Radices Æquationis $x_n - \frac{b}{A} x^{n-1} + \frac{c}{A} x^{n-2} - \&c. \pm \frac{C}{A} x^2 \mp \frac{B}{A} x \pm \frac{1}{A} = 0$, ſunt reales, ideoque (ex iis quæ modo diximus) $\frac{n-1}{2n} \times \frac{b^2}{A^2}$ majus eſſe debet quam $1 \times \frac{c}{A}$, & per conſequens $\frac{n-1}{2} \times b^2$ majus eſt quam $c \times A$; idcirco in Æquatione $x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - \&c. + cx^2 - bx + A = 0$, Dimenſionum n, & cujus omnes Radices ſunt reales, Quadratum Coefficientis x ductum in Fractionem $\frac{n-1}{2}$, majus eſt Rectangulo ex Coefficiente Termini x^2, & Numero abſoluto; ſed, (per Cor. Lem. III.) omnes Radices Æquationis $n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \&c. \times \frac{n-m}{m+1} x^{m+1} - \overline{n-1} \times \frac{n-2}{2} \times \&c. \times \frac{n-m}{m} B x^m + \overline{n-2} \times \frac{n-3}{2} \times \&c. \times \frac{n-m}{m-1} C x^{m-1}$ &c. $\pm \overline{n-m+1} \times \frac{n-m}{2} L x^2 \mp \overline{n-m} M x \pm N = 0$, ſunt reales; ideoque, cum hæc Æquatio ſit Dimenſionum $m+1$) Quadratum $\overline{n-m} \times M$ ductum in

in Fractionem $\frac{\overline{m+1}-1}{2\times\overline{m+1}}$ majus erit quam Rectangulum ex $\overline{n-m+1}$ $\times\frac{n-m}{2}\times$ L & N; id eſt $\frac{m}{2\times\overline{m+1}}\times\overline{n-m}|^2\times M^2$ majus erit quam $\overline{n-m+1}\times\frac{n-m}{2}\times L\times N$. ideoque (dividendo utrumque per $\overline{n-m+1}\times\frac{n-m}{2}$) erit $\frac{m\times\overline{n-m}}{\overline{m+1}\times\overline{n-m+1}}\times M^2$ majus quam $L\times N$. Q. E. D.

COR. Fiat ſeries Fractionum $\frac{n}{1}$, $\frac{n-1}{2}$, $\frac{n-2}{3}$, $\frac{n-3}{4}$ &c. uſque ad $\frac{1}{n}$, Quarum denominatores ſint Numeri in Progreſſione Arithmetica, 1, 2, 3, 4, &c, uſque ad numerum n, qui indicat Dimenſiones Æquationis $x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - \&c \pm A = 0$; Numeratores ſint in eadem Progreſſione ſed inverſa; dividatur ſecunda harum Fractionum per primam, tertia per ſecundam, & ſic deinceps, & ponantur fractiones, quæ ex hiſce Diviſionibus oriuntur ſupra medios Terminos Æquationis, hoc modo.

$$\frac{n-1}{2n},\quad \frac{2\times\overline{n-2}}{3\times\overline{n-1}},\quad \frac{3\times\overline{n-3}}{4\times\overline{n-2}},\quad \frac{4\times\overline{n-4}}{5\times\overline{n-3}}\ \&c.$$
$$x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - Dx^{n-3} + Ex^{n-4} - \&c. \pm A = 0.$$

Tunc ſi omnes Radices Æquationis ſunt reales, Quadratum cujusvis Coefficientis, ductum in Fractionem, quæ ſupereminet, majus erit Rectangulo, ex Coefficientibus adjacentibus: Hoc Corollarium converti non poteſt, innumeræ enim dantur Æquationes, in quibus Quadratum Coefficientis cujuscunque, ductum in Fractionem ſupereminentem majus eſſe poteſt Producto ex Coefficientibus adjacentibus, & tamen aliquæ vel forte omnes Radices poſſunt eſſe imaginariæ. Idcirco, ubi Quadratum Coefficientis ductum in Fractionem ſupereminentem majus eſt Producto ex Coefficientibus adjacentibus, nihil inde poteſt concludi, quoad poſſibilitatem, vel impoſſibilitatem, Radicum Æquationis; ſed ubi tale

tale Quadratum ita multiplicatum, minus eſt ejusmodi Producto, id certum eſt indicium duas dari Radices impoſſibiles.

Ex dictis, immediate deducitur demonſtratio Regulæ, quam dedit illuſtriſſimus NEWTONUS, qua determinatur Numerus Radicum impoſſibilium, in quavis data Æquatione.

Scholium.

Æquationis $x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - Dx^{n-3} + Ex^{n-4} - Fx^{n-5} +$ &c. $\pm$ A &c. $= o$ Radices deſignentur Litteris $a, b, c, d, e, f, g,$ &c. erit (ut notum eſt) B ſumma omnium Radicum $= a + b + c + d + e + f + g$ &c. C ſumma Productorum ex binis Radicibus $= ab + ac + ad + ae + af + ag +$ &c D ſumma Productorum ex ternis radicibus $= abc + abe + abf + abg +$ &c. E $= abcd + abcf + abcg +$ &c. F $= abcde + abcdf + abcdg + bcdef +$ &c, & ita deinceps. Repræſentet, ut in Propoſitione, M aliquod ex Coefficientibus, L & N Coefficientes adjacentes; ſit m Exponens ipſius M; ſit Z ſumma Quadratorum omnium Differentiarum, quæ dari poſſunt inter Terminos Coefficientis M: ſit α ſumma ex omnibus dictis Quadratis quorum termini differunt unâ litterâ, β ſumma illorum Quadratorum, quorum Termini duabus differunt litteris; γ ſumma illorum, quorum Termini tribus differunt litteris; δ ſumma, quorum Termini quatuor differunt litteris, & ſic de cæteris. Si M ſit æquale F $= abcde + abcdf + abcdg +$ &c. erit Z $= \overline{abcde - abcdf}|^2 + \overline{abcde - abcdg}|^2 + \overline{abcde - abcfg}|^2 + \overline{bcdef - abfgh}|^2 +$ &c. $\alpha = \overline{abcde - abcdf}|^2 + \overline{abcde - abcdg}|^2 + \overline{abcde - abcdh}|^2 + \overline{bcdef - bcdeg}|^2 +$ &c. $\beta = \overline{abcde - abcfg}|^2 + \overline{abcde - abcfh}|^2 + \overline{bcdef - bcdgh}|^2 +$ &c. $\gamma = \overline{abcde - abfgh}|^2 + \overline{abcdf - abegh}|^2 +$ &c. $\delta = \overline{abcde - afghk}|^2 + \overline{acdfg - abehk}|^2 +$ &c. Hiſce poſitis, dico, quod Quadratum cujusvis Coefficientis, ut M, ductum in Fractionem $\frac{m \times \overline{n-m}}{m+1 \times \overline{n-m+1}}$ excedit Rectangulum ex Coefficientibus adjacentibus L × N, Quantitate $\frac{\overline{n+1} \times Z}{m+1 \times \overline{n-m+1}}$

 $-\frac{1}{2}$

$\overline{abc - ade}|^2 + \overline{abc - cde}|^2 + \overline{abc - bde}|^2 + \&c.\ \gamma = o$. Ideo $\frac{3 \times \overline{5-3}}{\overline{3+1} \times \overline{5-3+1}}$ D^2, vel $\frac{1}{2} D^2$ excedet $C \times E$ Quantitate $\frac{\overline{5+1} \times Z}{\overline{3+1} \times \overline{5-3+1}}$ $- \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{3}\beta =$ (quia $Z = \alpha + \beta$) $\frac{1}{6}\beta = \frac{1}{6} \times \overline{abc - ade}|^2 + \frac{1}{6} \times \overline{abc - bde}|^2 + \&c$, qui ſemper eſt Numerus Poſitivus, ubi Radices ſunt reales.

Sit $M = E = abcd + abce + abde + bcde + \&c.$ erit $L = D$, $N = A$, $m = 4$, $Z = \overline{abcd - abce}|^2 + \overline{abcd - abde}|^2 + \overline{abcd - bcde}|^2 + \&c. = \alpha$; $\beta = o = \gamma = \delta$. Ideo $\frac{4 \times \overline{5-4}}{\overline{4+1} \times \overline{5-4+1}}$ $\times E^2$, vel $\frac{2}{5} E^2$ excedet $D \times A$ Quantitate $\frac{\overline{5+1} \times Z}{\overline{4+1} \times \overline{5-4+1}} - \frac{1}{2}\alpha = \frac{3}{5} Z - \frac{1}{2}\alpha, = \frac{1}{10} Z = \frac{1}{10} \times \overline{abcd - abce}|^2 + \frac{1}{10}\ \overline{abcd - bcde}|^2 + \&c.$ Qui Numerus eſt ſemper Poſitivus, ſi Radices ſint Numeri reales.

PROPOSITIO II.

Sit $x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - Dx^{n-3} + Ex^{n-4} - \&c. \pm = o$ Æquatio cujuscunque Dimenſionis, cujus Radices cum ipſarum ſignis exprimantur litteris a, b, c, d, e, f, &c. Sit M Coefficiens quicunque hujus Æquationis, ſint L & N Coefficientes adjacentes ipſi M; K, O Coefficientes adjacentes ipſis L & N; I, P adjacentes ipſis K, & O; H, Q, ipſis I & P, & ſic deinceps ſit m exponens Coefficientis M, & Z (ut in Scholio) = ſummæ omnium Quadratorum, quæ fieri poſſunt ex Differentiis Terminorum ipſius M. Quadratum cujuſcunque Coefficientis, ut M, ductum in hanc Fractionem $\frac{1}{2} \times \overline{1 - \frac{1}{n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}\ \&c. \times \frac{n-m-1}{m}}}$ excedit $L \times N - K \times O + I \times P - H \times Q + \&c.$ Quantitate $\frac{\frac{1}{2} Z}{n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}\ \&c \times \frac{n-m-1}{m}}$,

quæ

quæ Quantitas ſemper eſt Numerus poſitivus, cum Radices a, b, c, d, &c ſunt reales, ſive poſitivæ, ſive negativæ.

Sit Æquatio ſeptem Dimenſionum, ut $x^7 - Bx^6 + Cx^5 - Dx^4 + Ex^3 - Fx^2 + Gx - A = o$. Cujus Radices ſint a, b, c, d, e, f, g. in hoc caſu $n = 7$, ſit $M = E = abcd + abce + abcf + abcg + bcde +$ &c. erit $m = 4$, $L = -D$, $N = -F$, $K = C$, $O = G$, $I = -B$, $P = -A$; $Z = \overline{abcd - abce}|^2 + \overline{abcd - abcf}|^2 + \overline{abcd - abcg}|^2$ &c. + Idcirco $\frac{5}{4} \times 1 - \frac{1}{7 \times \frac{6}{2} \times \frac{5}{3} \times \frac{4}{4}} \times E^2$ vel $\frac{17}{35} E^2$ excedet $D \times F - C \times G + B \times A$ Quantitate $\frac{\frac{1}{2} Z}{7 \times \frac{6}{2} \times \frac{5}{3} \times \frac{4}{4}}$ vel $\frac{Z}{70} = \frac{1}{70} \times \overline{abcd - abce}|^2 + \frac{1}{70} \times \overline{abcd - abcf}|^2 +$ &c.

Ex hac Propoſitione deducitur ſequens Regula determinandi Numerum Radicum impoſſibilium in data Æquatione.

E Binomio elevato ad Potentiam cujus index exprimit Dimenſiones Æquationis Propoſitæ ſumantur Unciæ Terminorum mediorum, unitate depreſſæ; quævis Uncia ſic deminuta, dividatur per reſpondentem Unciam duplicatam, & Fractiones, quæ inde oriuntur ponantur ſupra medios Terminos Correſpondentes in data Æquatione: & ſi Quadratum cujusvis Termini ductum in Fractionem ſupereminentem majus ſit quam Rectangulum e Terminis immediate adjacentibus, minus Rectangulo ex proxime utrinque jacentibus, plus Rectangulo ex utrinque ſequentibus, minus &c, tunc ſignum + ponatur ſub ipſum Terminum, cujus Quadratum fuit multiplicatum per Fractionem ſupereminentem; ſin minus, ponatur ſignum Negativum, atque ſub Primum & Ultimum Terminum ponatur ſignum +. Tot ad minimum erunt Radices, impoſſibiles, quot dantur mutationes in ſerie ſignorum a ſigno + ad ſignum −, vel a −, ad +.

Ex. gr. Determinandæ ſint Radices impoſſibiles in Æquatione hac, $x^7 - 5x^6 + 15x^5 - 23x^4 + 18x^3 + 10x^2 - 28x + 24 = o$. Unciæ Terminorum inter mediorum in ſeptima Potentia cujusvis Binomii

nemii ſunt 7, 21, 35, 35, 21, 7. ex quibus ſubtrahendò unitatem, & dividendo, reliquum per ipſam unciam duplicatam, Quotientes erunt $\frac{6}{14}, \frac{20}{42}, \frac{34}{70}, \frac{34}{70}, \frac{20}{42}, \frac{6}{14}$. vel $\frac{3}{7}, \frac{10}{21}, \frac{17}{35}, \frac{17}{35}, \frac{10}{21}, \frac{3}{7}$; Quæ fractiones ponendæ ſunt ſupra medios Terminos datæ Æquationis hoc modo.

$$\begin{array}{cccccccc} & \frac{3}{7} & \frac{10}{21} & \frac{17}{35} & \frac{17}{35} & \frac{10}{21} & \frac{3}{7} & \\ x^7 & -5x^6 & +15x^5 & -23x^4 & +18x^3 & +10x^2 & -28x & +24=0. \\ + & - & + & - & + & - & + & + \end{array}$$

Deinde quia Quadratum ipſius $5x^6$ ductum in fractionem ſupereminentem $\frac{3}{7}$, ideſt $\frac{75}{7}x^{12}$ minus eſt quam $x^7 \times 15x^5$, ideſt quam $15x^{12}$, pono ſignum — ſub Terminum $5x^6$. Porro, quia Quadratum ipſius $15x^5$ ductum in Fractionem ſupereminentem $\frac{10}{21}$, id eſt $\frac{750}{7}x^{10}$ majus eſt quam $\overline{-5x^6} \times \overline{-23x^4} - \overline{x^7 \times 18x^3} = 97x^{10}$, pono ſignum + ſub Terminum $15x^5$. Video etiam quod $\frac{8993}{35}x^8$ (Quadratum Termini $23x^4$ ductum in Fractionem $\frac{17}{35}$) minus eſt, quam $\overline{15x^5 \times 18x^3} - \overline{5x^6 \times 10x^2} + \overline{x^7 \times -28x} = 292x^8$, pono ſignum — ſub Terminum $23x^4$, deinde quia $\overline{18x^3}|^2 \times \frac{17}{35}$, id eſt $\frac{5508}{35}x^6$, majus eſt quam $-\overline{23x^4 \times 10x^2} - \overline{15x^5 \times -28x} - \overline{5x^6 \times 24} = 70x^6$, pono ſignum + ſub Terminum $18x^3$. Porro, cum $\overline{10x^2}|^2 \times \frac{10}{21}$, vel $\frac{1000}{21}x^4$ minus ſit quam $\overline{18x^3 \times -28x} - \overline{23x^4 \times 24} = 48x^4$, pono ſignum — ſub Terminum $10x^2$; Tandem quia $\overline{28}|^2 \times \frac{3}{7}$, vel $336x^2$ majus eſt quam $10x^2 \times 24 = 240x^2$, pono ſub $28x$ ſignum +; & ut dixi ſub primum atque ultimum Terminum ſcribo +. Cum autem ſint ſex mutationes in ſignis video ſex dari Radices impoſſibiles.

Si Radices impoſſibiles fuiſſent inveniendæ per Regulam NEWTONIANAM, ſic fuiſſet operandum.

$$\begin{array}{cccccccc} & \frac{3}{7} & \frac{5}{9} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{5}{9} & \frac{3}{7} & \\ x^7 & -5x^6 & +15x^5 & -23x^4 & +18x^3 & +10x^2 & -28x & +24=0. \\ + & - & + & + & + & + & + & + \end{array}$$

per quam Regulam duæ tantum Radices impoſſibiles inveniuntur, cum dentur ſex, ſcilicet $1+\sqrt{-3}$, $1-\sqrt{-3}$, $1+\sqrt{-2}$, $1-\sqrt{-2}$, $1+\sqrt{-1}$, $1-\sqrt{-1}$, ſeptima Radix eſt -1.

F I N I S.

52.262

Digitized by Google

Digitized by Google

005663267

Digitized by Google

Digitized by Google